

531  
М-56

Проф. И. В. Мещерекій

---

КУРСЪ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
МЕХАНИКИ

---

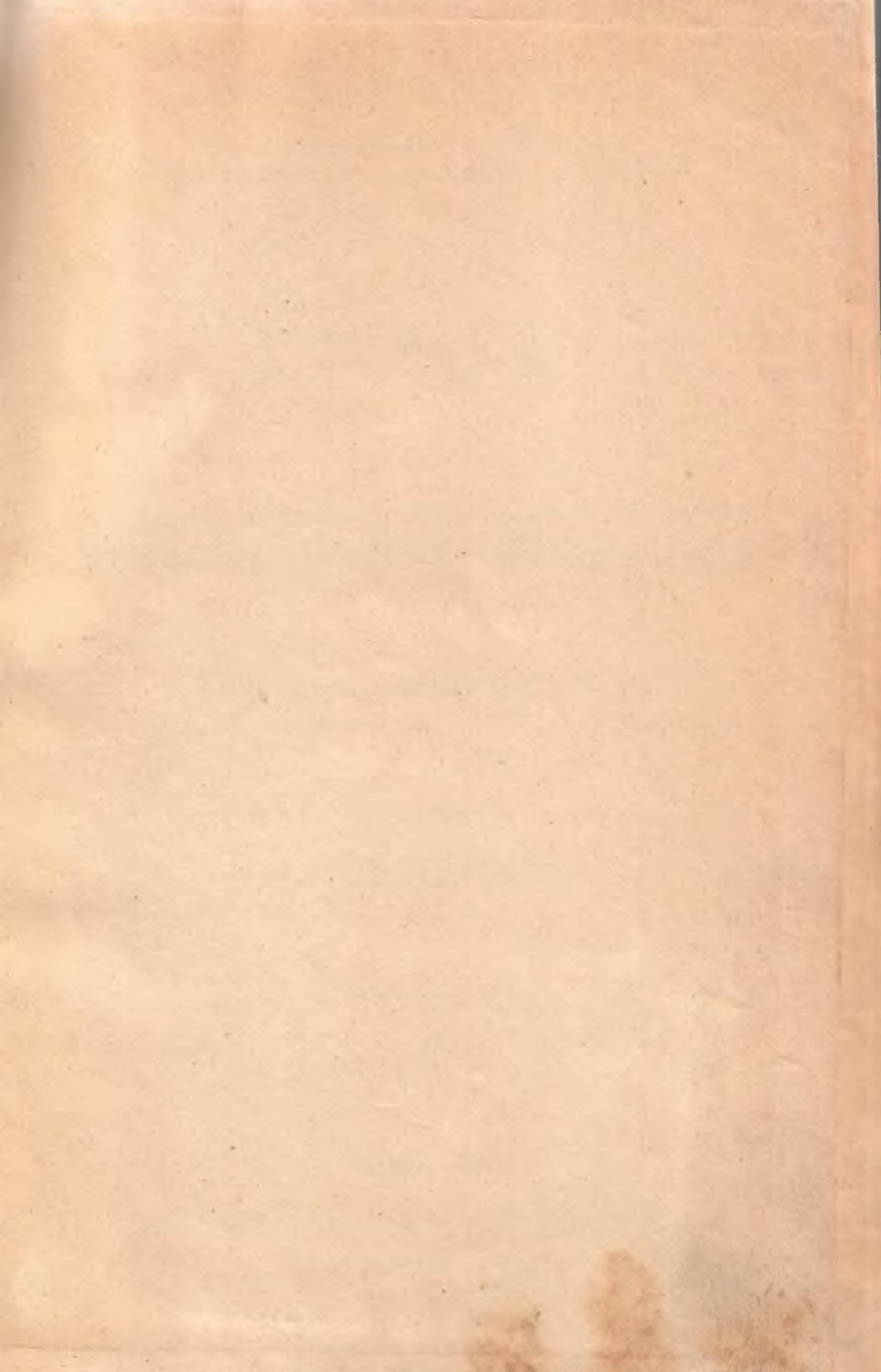
ИЗДАНИЕ  
КАССЫ ВЗАИМОПОМОЩИ  
СТУДЕНТОВЪ  
СПБ. ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО ИНСТИТУТА  
ИМПЕРАТОРА  
ПЕТРА ВЕЛИКАГО.

Проф. И. В. Мещерекій. КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Ч. I.



54401







Изданіе Кассы Взаимопомощи Студентовъ СПб. Политехническаго Института  
Императора Петра Великаго.

531  
M-56

КУРСЪ

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Проф. И. В. МЕЩЕРСКАГО.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1912.



# **Л Е К Ц І И,**

**читанныя проф. И. В. Мещерскимъ на второмъ  
семестрѣ техническихъ отдѣленій  
С.-Петербургскаго Политехническаго Института  
Императора Петра Великаго  
въ 1912 г.**

СТАТНКА



## ВВЕДЕНИЕ.

Разсматривая положеніе тѣла среди другихъ тѣлъ, мы замѣчаемъ, что разстоянія точекъ этого тѣла отъ точекъ другихъ тѣлъ или остаются постоянными, или измѣняются съ теченіемъ времени: въ первомъ случаѣ мы говоримъ: тѣло остается въ покое, во второмъ: тѣло движется.

Изученіе покоя и движенія тѣлъ и тѣхъ причинъ, которыми они обусловливаются, составляетъ предметъ теоретической механики.

Теоретическая механика, какъ указываетъ самый предметъ этой науки, дѣлится на двѣ части: одна — статика разсматриваетъ покой тѣлъ въ связи съ причинами, которыми онъ обусловливается, другая — кинематика\*) разсматриваетъ движеніе тѣлъ и связь, существующую между движеніемъ и вызывающимъ его причинами.

Мы будемъ разсматривать покой и движеніе твердыхъ тѣлъ.

Твердымъ тѣломъ называется въ механикѣ такое тѣло, въ которомъ разстояніе между какими двумя точками остается неизмѣннымъ\*\*).

---

\*) Эта часть теоретической механики часто называется *Ау-  
намикой*.

Введеніе въ кинематику, въ которомъ разсматривается движе-  
ніе независимо отъ вызывающихъ его причинъ, называется *Кине-  
матикой*.

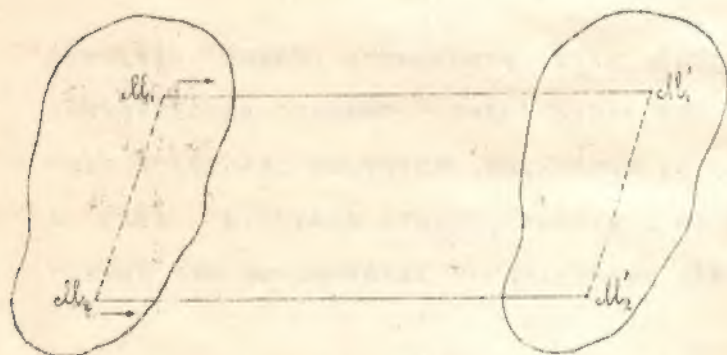
\*\*) Въ дальнѣйшемъ изложеніи подъ словомъ „тѣло“ разумѣ-  
ется „твердое тѣло“.

Твердое тѣло мы называемъ *свободнымъ*, если изъ занимаема-го имъ положенія оно можетъ быть перемѣщено въ какое-угодно соосѣдное положеніе; въ противномъ случаѣ тѣло мы называемъ *несвободнымъ*.

Движенія твердаго тѣла могутъ быть весьма разнообразны; простѣйшее изъ нихъ есть движеніе *поступательное*.

Движеніе тѣла называется *поступательнымъ*, если двѣ какія-либо пересѣкающіяся плоскости, проведенныя черезъ точки тѣла, при движеніи его остаются себѣ параллельными. Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что при поступательномъ движеніи тѣла всякая плоскость, проведенная черезъ точки тѣла, остается себѣ параллельной, а потому и всякая прямая, проведенная черезъ точки тѣла, также остается себѣ параллельной.

Если при по-  
ступательномъ  
движеніи одна  
изъ точекъ тѣла  
движется по пря-  
мой линіи, то всѣ  
его точки дви-  
жутся по прямымъ,  
параллельнымъ



Чертежъ 1.

между собою; въ такомъ случаѣ движеніе тѣла называется *прямо-линейнымъ* (черт. 1).

Если при этомъ длины путей, пройденныхъ какою-либо точкою тѣла въ какіе угодно равные промежутки времени, равны между собою, то движеніе называется *равномернымъ*.

## ГЛАВА I.

### ПРИНЦИПЫ СТАТИКИ.

При изложеніи статики мы будемъ основываться на шести принципахъ, которые принимаемъ безъ доказательствъ.

Первый принципъ (принципъ инерціи, первый законъ Ньютона).

*Свободному тѣлу - покоящемуся свойственно оставаться въ покое, а движущемуся поступательно свойственно двигаться прямолинейно и равномерно.*

Причины такого состоянія тѣла, которое не объясняется принципомъ инерціи, мы называемъ силами.

Силы по своему происхожденію весьма разнообразны, какъ-то: сила тяжести, сила всемірнаго тяготѣнія, сила упругости, давленіе одного тѣла на другое, сопротивленіе среды, силы магнитныя и электрическія.

Силы могутъ дѣйствовать на тѣло тогда, когда оно находится въ покой или движется равномерно и прямолинейно; въ этомъ случаѣ мы говоримъ, что силы, приложенныя къ тѣлу, находятся въ равновѣсіи или взаимно-уравновѣшиваются, или также, что тѣло находится въ равновѣсіи.

Каждой силѣ мы приписываемъ слѣдующія три свойства: точку приложенія, направленіе и величину.

Направленіе силы есть направленіе того прямолинейнаго движенія, которое тѣло можетъ получить при дѣйствіи силы.

Прямая, по которой сила направлена въ ту или другую сторону, называется линіей дѣйствія силы.



Величину силы мы определяемъ при помощи второго принципа.

### Второй принципъ.

Свободное тѣло, при дѣйствіи двухъ силъ, къ нему приложенныхъ, находится въ равновѣсіи тогда и только тогда, когда эти силы равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны.

Изъ этого принципа слѣдуетъ, что двѣ силы называются равными, если покоящееся свободное тѣло послѣ приложенія къ нему этихъ силъ по одной прямой въ противоположныхъ направленіяхъ остается въ покое.

Изъ опредѣленія равныхъ силъ слѣдуетъ, что одна сила будетъ въ  $n$  разъ больше другой, если для уравновѣшиванія ея нужно приложить къ тѣлу въ противоположномъ направленіи  $n$  силъ, равныхъ второй силѣ.

За единицу при измѣреніи силъ мы принимаемъ силу, произвольно выбранную, напримѣръ, вѣсъ въ опредѣленномъ мѣстѣ на земной поверхности одного килограмма, т.е. одного литра дистиллированной воды въ состояніи наибольшей плотности.

Приборы, съ помощью которыхъ производится измѣреніе силъ, называются динамометрами; динамометръ Поисселе (огнутая подъ угломъ упругая пластинка) и динамометръ Ренъо (согнутая упругая пластинка для измѣренія силъ большей величины) описаны въ элементарныхъ курсахъ физики.

Условившись изображать величину силы, равной единицѣ, произвольно выбраннымъ отрезкомъ  $kl$  прямой (черт. 2), мы можемъ



черт. 2.

величину силы, содержащей  $n$  единицъ, изобразить отрезкомъ  $KL$ , при чемъ  $\frac{KL}{kl} = n$ .

Пусть  $A$  точка приложенія силъ (черт. 3).  $AM$  — линія ея дѣйствія, тогда отрезокъ  $AR = KL$ , отложенный по прямой  $AM$  отъ точки  $A$  въ направленіи

силы, представляет графическое изображение силы.

Иногда отрезок обозначается одной буквой, например,  $F$ , и говорят: „сила  $AB$ “ или „сила  $F$ “.

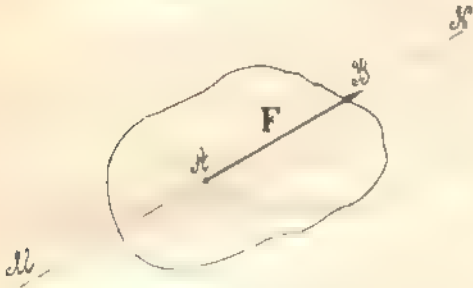


рис. 3.

Совокупность сил, приложенных к твердому телу, часто называется системой сил.

Определение. Две системы сил называются эквивалентными, если каждая из них поровну уравнивается

одной и той же системой сил.

Если система сил  $A$  эквивалентна системе сил  $B$ , то говорят, что „система  $A$  оказывает на тело такое же действие, как система  $B$ “, или, что „систему  $A$  можно заменить системой  $B$ “.

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей системы; силы системы, по отношению к равнодействующей, называются составляющими.

Процесс, посредством которого мы находим равнодействующую для данной системы сил, называется сложением сил, а обратный процесс, посредством которого для данной силы находим эквивалентную ей систему нескольких сил — ее составляющих, называется разложением силы.

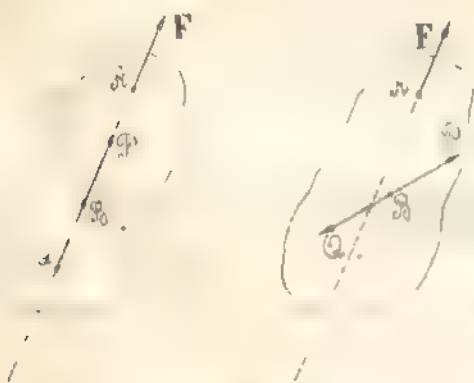
Если система сил находится в равновесии, то относительно такой системы сил можно сказать, что она эквивалентна нулю. Система сил, находящаяся в равновесии, эквивалентна всякой другой системе сил, находящейся также в равновесии.

Третий принцип.

Имеем две эквивалентные системы  $A$  и  $B$ . Если мы

присоединимъ къ нимъ, или удалимъ отъ нихъ соответственно две системы силъ  $C$  и  $D$ , эквивалентныя между собою, то вновь полученныя системы силъ:  $(A+C)$  и  $(B+D)$  или  $(A-C)$  и  $(B-D)$ , будутъ также эквивалентны другъ другу.

Изъ этого принципа слѣдуетъ, что, не измѣняя дѣйствія силъ, приложенныхъ къ тѣлу, мы можемъ присоединить къ нимъ, или удалять изъ нихъ силы взаимно-уравновѣшивающіяся.



Чертежъ 1.

На основаніи второго и третьяго принциповъ доказывается слѣдующая теорема (черт. 4):

Не измѣняя дѣйствія силы, приложенной къ тѣлу, точку ея приложенія можно перенести въ какую-нибудь другую точку, которая или

принадлежитъ тѣлу, или рассматривается какъ неизменно съ нимъ связанная, - при томъ и только при томъ условіи, чтобы эта точка находилась на линіи дѣйствія силы.

Доказательство ясно изъ чертежа 4, гдѣ  $M$  - точка приложенія данной силы  $F$ ; силы  $P$  и  $Q$ , приложенныя нами въ точкѣ  $O$ , равны и противоположно направлены; на лѣвомъ чертежѣ

$$Q = Q - F,$$

и мы удаляемъ силы  $Q$  и  $F$ , тогда остается сила  $P$ , эквивалентная  $F$ ; на правомъ чертежѣ силы  $P$  и  $Q$  могутъ быть равны и неравны  $F$ ; во всякомъ случаѣ, на основаніи принципа втораго, сила  $Q$  не можетъ уравновѣшивать силу  $F$ , а слѣовательно, сила  $P$  не можетъ быть эквивалентна силѣ  $F$ .

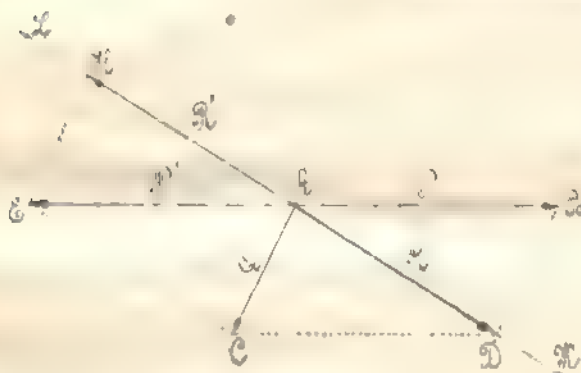


### Четвертый принцип.

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке и составляющих между собой некоторый угол (не  $0^\circ$  и не  $180^\circ$ ), направлена по диагонали параллелограмма, построенного на этих силах.

Основываясь на этом принципе, легко доказать, что длина диагонали параллелограмма, построенного на данных силах, представляет величину равнодействующей (черт. 5).

Докажем это. На чертеже 5:  $M$  -



Чертеж 5.

точка приложения данных сил  $AB$  -  $P$  и  $AC$  -  $Q$ ;  $AM$  - направление их равнодействующей  $R$ , величина которой нам пока неизвестна.

Сила  $P'$ , равная

$M$ , но противоположно направленная, т.е. по прямой  $AM$ , будет уравновешивать данную силу; если же три силы  $P$ ,  $Q$ ,  $P'$  находятся в равновесии, то каждая из них уравновешивает две другие, поэтому сила  $P$  уравновешивает  $Q$  и  $P'$ , следовательно, сила  $P'$ , равная  $P$ , но противоположно направленная по прямой  $AB$  ( $AB$  -  $AM$ ), будет равнодействующей для сил  $Q$  и  $P'$ ; на основании принципа четвертого  $R$  должна быть направлена по диагонали параллелограмма, одна сторона которого есть  $AC$ , а другая направлена по  $AM$ ; построив этот параллелограмм  $ACBM$ , мы найдем, что величина силы  $R$  равна  $AM$ , а значит из равенства треугольников  $ACM$  и  $AMB$  получаем, что

$$AM = AM;$$

следовательно:

$$R = P + Q.$$

т.е. искомая величина равнодѣйствующей  $R$  изображается длиной діагонали  $AD$ .

#### Пятый принципъ.

*Въ случаѣ несвободнаго тѣла осуществленіе опоръ, отънимающихъ свободу тѣла, всегда можетъ быть замѣнено присоединеніемъ къ даннымъ силамъ, приложеннымъ къ тѣлу, нѣкоторыхъ новыхъ силъ; эти силы называются реакціями или сопротивленіями опоръ.*

Такі напримѣръ: если въ тѣлѣ имѣется неподвижная точка, то реакція ея будетъ сила, линія дѣйствія которой проходитъ черезъ эту точку; при существованіи въ тѣлѣ неподвижной оси — реакціи будутъ силы, линіи дѣйствія которыхъ пересекаются данную ось; если тѣло опирается одною или нѣсколькими точками на гладкую плоскость, то реакціи будутъ силы, приложенныя къ тѣлу въ точкахъ прикосновенія и направленныя по перпендикулярамъ къ плоскости въ сторону тѣла, и такъ далѣе; остальные свойства реакцій опредѣляются изъ условій даннаго вопроса.

Основываясь на пятомъ принципѣ, всякій вопросъ о равновѣсіи несвободнаго тѣла мы можемъ привести къ соответствующему вопросу о равновѣсіи свободнаго тѣла.

#### *Третьей принципъ (третій законъ Ньютона).*

*Всякому дѣйствию соответствуетъ равное и противоположное противодействию.*

На основаніи двухъ послѣднихъ принциповъ мы заключаемъ, что несвободное тѣло оказываетъ на опору „дѣйствіе“, равное и противоположное реакціи; это дѣйствіе называется „давленіемъ“ тѣла на опору.

# СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ.

## ГЛАВА II.

### СЛОЖЕНИЕ, РАЗЛОЖЕНИЕ И РАВНОВѢСІЕ СИЛЪ, ПРИЛОЖЕННЫХЪ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

#### § 1. Способъ „многоугольника силъ“.

**1-й случай.** Силы направлены по одной прямой въ одну и ту же сторону.

Равнодействующая данныхъ силъ направлена въ ту же сторону и по величинѣ равна ихъ суммѣ.



Въ случаѣ, изображенномъ на чертежѣ 6, равнодействующая силъ:  $MA - a$ ,  $MB - b$ ,  $MC - c$  будетъ сила  $MD - a + b + c$ . Разложеніе данной силы на  $n$  составляющихъ силъ, направленныхъ по той же прямой въ ту же сторону, приводится къ разложенію данного числа на  $n$  арифметическихъ слагаемыхъ и будетъ определеннымъ только при заданіи  $(n-1)$  составляющихъ; при этомъ сумма заданныхъ составляющихъ

**Чертежъ 6.** должна быть меньше данной силы.

Равновѣсіе силъ въ рассматриваемомъ случаѣ невозможно.

**2-ой случай.** Силы направлены по одной прямой въ различныя стороны.

Въ этомъ случаѣ мы приписываемъ величинамъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, знакъ плюсъ, а въ противоположную



сторону знакъ минусъ, и находимъ ихъ алгебраическую сумму.

Величина равнодѣйствующей будетъ равна абсолютной величинѣ этой суммы, а направленіе равнодѣйствующей опредѣляется знакомъ суммы.



Въ случаѣ, изображенномъ на чертежѣ 7,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  положительныя числа,  $d$  и  $e$  — отрицательныя; равнодѣйствующая

$$R = a + b + c + d + e$$

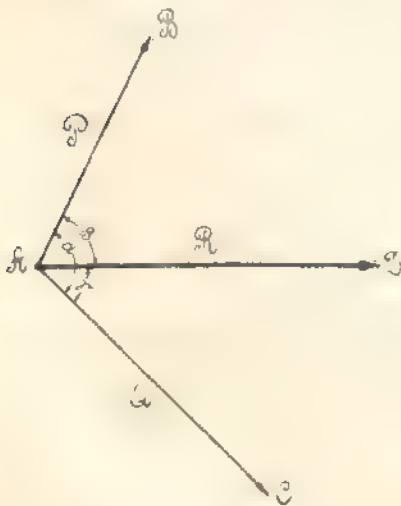
и направлена въ ту же сторону, что и сила  $ll$ .

Разложеніе данной суммы на  $n$  составляющихъ силъ, направленныхъ по той же прямой, — вообще говоря, въ разныя стороны, приводится

Чертежъ 7. къ разложенію даннаго числа на  $n$  алгебраическихъ слагаемыхъ и будетъ опредѣленнымъ при заданіи  $(n - 1)$  слагаемыхъ.

Въ рассматриваемомъ случаѣ силы находятся въ равновѣсіи, если алгебраическая сумма ихъ величинъ равна нулю.

3-ій случай. Двѣ силы, направленія которыхъ составляютъ уголъ, не равный  $0^\circ$  или  $180^\circ$ .

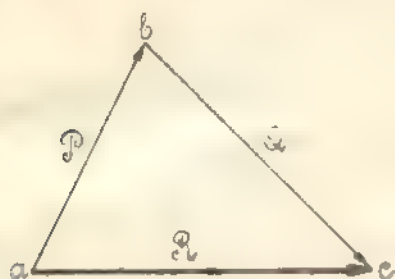


Чертежъ 8.

Четвертый принципъ даетъ: равнодѣйствующая изображается по величинѣ и направленію діагонали параллелограмма, построеннаго на линіяхъ, изображающихъ двѣ данныя силы (черт. 8).

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что въ настоящемъ случаѣ вмѣсто параллелограмма можемъ построить треугольникъ (черт. 9); изъ про-

произвольно взятой точки  $a$  проводимъ прямую  $ab$ , равную и параллельную силѣ  $P$ , изъ конца ея  $b$  проводимъ прямую  $bc$ , равную и параллельную силѣ  $Q$ ; соединяя точку  $a$  съ  $c$ , получаемъ прямую  $ac$ , которая изображаетъ величину и направление равнодѣйствующей  $R$ .



Чертежъ 8.

Для опредѣленія величины равнодѣйствующей и соответствующихъ угловъ пооредотъ - вомъ вычисленія имѣемъ слѣдующія формулы:

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha,$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \frac{Q}{R},$$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \frac{P}{R},$$

$$\frac{P}{\sin \gamma} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

На основаніи предыдущаго получается разложеніе данной силы на двѣ составляющія, направленія которыхъ составляютъ уголъ не  $0^\circ$  и не  $180^\circ$ ; при этомъ могутъ быть даны:

- 1) величина и направленіе одной составляющей,
- 2) линіи дѣйствія обѣихъ составляющихъ,
- 3) величины обѣихъ составляющихъ,
- 4) величина одной составляющей и направленіе другой.

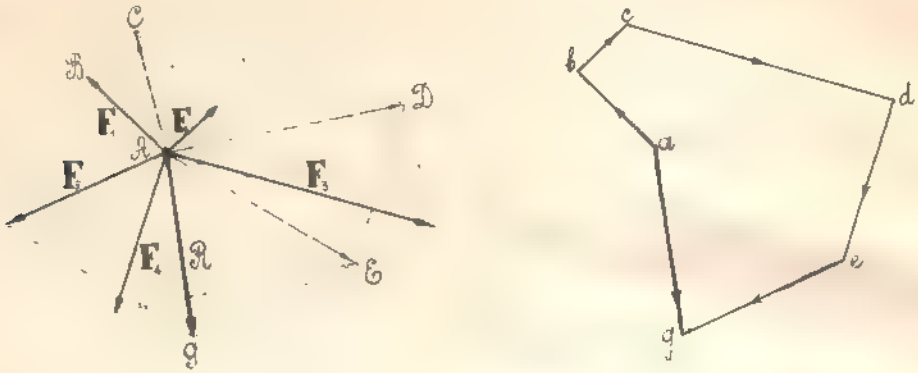
Равновесіе въ разсматриваемомъ случаѣ невозможно.

4-ый случай. Какое угодно число силъ, линіи дѣйствія которыхъ лежатъ въ одной плоскости.

Послѣдовательно принимая правило параллелограмма, приходимъ къ слѣдующему заключенію: равнодѣйствующая изображается по величинѣ и направленію замыкающимъ многоугольникомъ, стороны котораго изображаютъ по величинѣ и направленію данныя силы.

Этотъ многоугольникъ называется многоугольникомъ силъ.

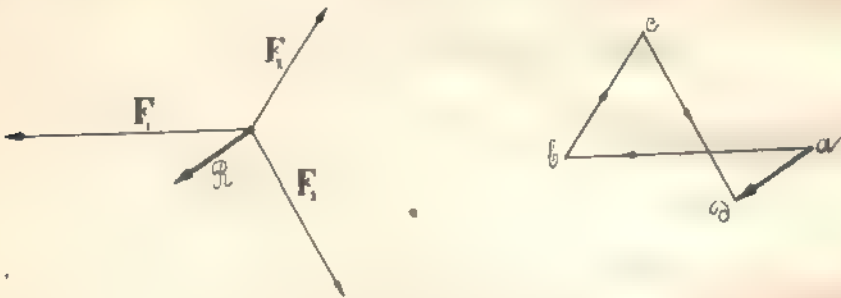
Для силъ  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  многоугольникъ силъ будетъ  $ABCDEG$  или, на отдельномъ чертежѣ, „ $abcdeg$ ” (черт. 10).



Чертежъ 10.

Равнодѣйствующая  $R = AG = ag$ .

Замѣтимъ, что стороны многоугольника силъ могутъ пересѣкаться, какъ на примѣрѣ, для силъ  $F_1, F_2, F_3$  (черт. 11) многоугольникъ  $abc$  будетъ многоугольникъ силъ.



Чертежъ 11.

Величина и направленіе равнодѣйствующей, очевидно, не измѣнится, если мы измѣнимъ порядокъ, въ которомъ проводимъ стороны многоугольника силъ одну за другой, или нѣкоторыя данныя силы замѣнимъ ихъ равнодѣйствующей.

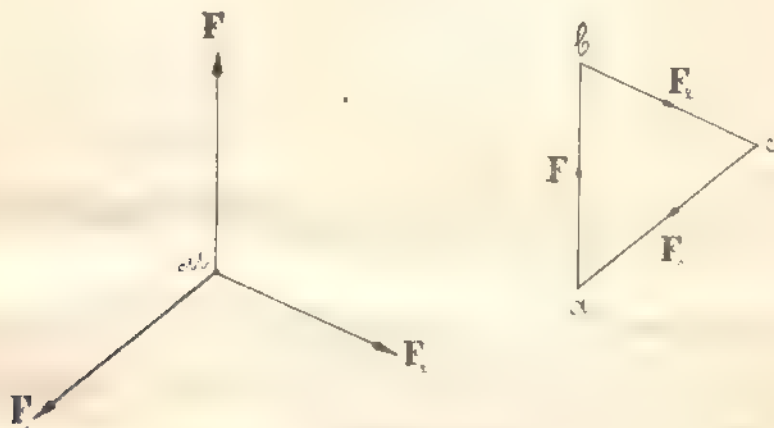
Разложеніе данной силы на  $n$  составляющихъ въ одной съ нею плоскости производится на основаніи предыдущаго построенія; оно остановится опредѣленнымъ тогда, когда заданы по величинѣ и направленію  $(n - 1)$  составляющихъ, а относительно



остальных двух известно то, что указано в предыдущем случае.

Для равновесия нескольких угловых сил, приложенных в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы многоугольник сил был замкнут.

В частном случае, когда мы имеем только три силы  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ , (черт. 12), приложенные в одной точке, для равновесия необходимо:



Чертеж 12.

во 1-ых, чтобы они лежали в одной плоскости, так как одна из них должна быть равна и противоположна равнодействующей двух других, и

во 2-х, чтобы они удовлетворяли равенствам:

$$\frac{F}{\sin(F_1, F_2)} = \frac{F_1}{\sin(F, F_2)} = \frac{F_2}{\sin(F, F_1)}$$

так как многоугольник сил в этом случае обращается в треугольник.

Заметьте, что отрезок прямой, имеющий определенную величину и определенное направление, называется вектором; по-

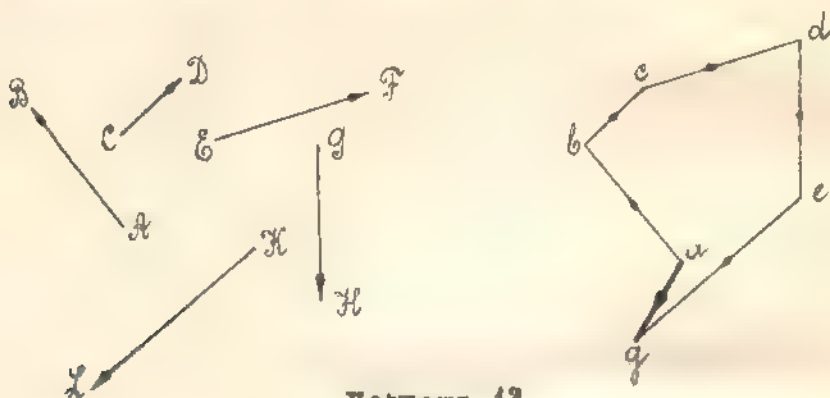
"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. проф. Н. Б. МЕЧЕРСКИЙ.  
 Издание Кассы Взаимопомощи Студ. СПб. Политехн. института.  
 Типо-литография Н. Трофимова, СПб. Мокшанская, 3.  
 Корректор А. С. Балаев.

Листъ 2.

этому сила может быть рассматриваема, какъ векторъ.

Мы говоримъ, что два вектора равны по величинѣ и направленію, если они имѣютъ одинаковую длину, параллельны и направлены въ одну сторону.

Пусть даны векторы  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$ ,  $KL$ , какъ угодно расположенные въ плоскости (черт. 13).



Чертежъ 13.

Изъ произвольно выбранной точки  $a$  проводимъ прямая, равныя имъ по величинѣ и направленію, такъ, чтобы слѣдующая выходила изъ конца предыдущей:

$$ab \parallel AB:$$

$$bc \parallel CD:$$

$$cd \parallel EF:$$

$$de \parallel GH:$$

$$ef \parallel KL:$$

Этотъ процессъ называется геометрическимъ сложеніемъ данныхъ векторовъ, а замыкающая полученнаго многоугольника  $af$ , направленная отъ точки  $a$  къ точкѣ  $f$ , называется ихъ геометрической суммой.

Геометрическая сумма не измѣнится, если мы измѣнимъ порядокъ слагаемыхъ или нѣсколько слагаемыхъ замѣнимъ ихъ геометрической суммой.

Арифметическую и алгебраическую сумму можно рассматривать,

какъ частные случаи суммы геометрической, когда слагаемые векторы параллельны и направлены всё въ одну сторону или въ разныя стороны.

На основаніи предидущаго получаемъ слѣдующую общую теорему:

*равнодѣйствующая* сколькихъ угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ и лежащихъ въ одной плоскости, равна по величинѣ и направленію геометрической суммы этихъ силъ.

Способы, указанные для сложения силъ въ первомъ и второмъ случаѣ, могутъ быть рассматриваемы, какъ частные случаи правила многоугольника силъ: въ этихъ случаяхъ углы многоугольника силъ равны  $0^\circ$  или  $180^\circ$ .

## § 2. Способъ проекцій.

Всѣ вопросы о сложении, разложеніи и равновѣсіи силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, могутъ быть рѣшаемы съ помощью проекцій рассматриваемыхъ силъ на нѣкоторыя оси; для большей простоты эти оси берутся обыкновенно взаимноперпендикулярными.

Изъ геометріи извѣстно, что проекція замыкающей многоугольника на какую угодно ось равна суммѣ проекцій сторонъ этого многоугольника на ту же ось.

Принимая это предложеніе къ многоугольнику силъ, получаемъ слѣдующую теорему:

*Проекція равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, на всякую ось, равна суммѣ проекцій составляющихъ силъ на ту же самую ось.*

Пусть будутъ  $F, F_1, F_2, \dots, F_n$  составляющія силы, лежащія въ одной плоскости, и  $R$  ихъ равнодѣйствующая.

Возьмемъ въ плоскости силъ двѣ взаимноперпендикулярныя оси  $OX$  и  $OY$  (черт. 14); обозначимъ проекціи на эти оси



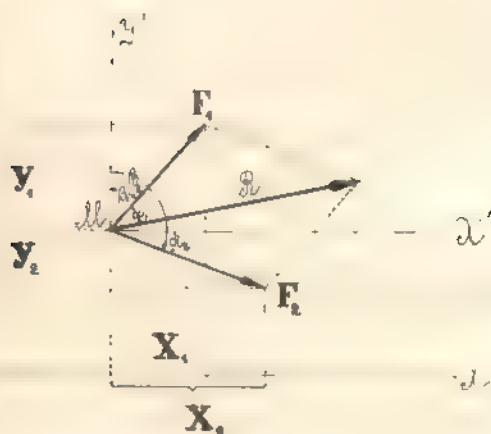
силъ  $F$  черезъ  $X$  и  $Y$ ;  $F_1$  черезъ  $X_1$  и  $Y_1$ ;..... $F_n$  черезъ  $X_n$  и  $Y_n$ ; тогда имѣемъ:

$$X_1 = F_1 \cos \alpha_1, \quad Y_1 = F_1 \cos \beta_1;$$

$$X_2 = F_2 \cos \alpha_2, \quad Y_2 = F_2 \cos \beta_2;$$

.....

$$X_n = F_n \cos \alpha_n, \quad Y_n = F_n \cos \beta_n,$$



Чертежъ 14.

если  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  суть углы, которые сила  $F$  образуетъ осями  $OX$  и  $OY$ ;....  
..... $\alpha_n, \beta_n$  — углы, которые сила  $F_n$  образуетъ съ осями  $OX$  и  $OY$  \*).

Проекція равнодѣйствующей  $R$  обозначимъ черезъ  $X$  и  $Y$ ; тогда, на основаніи вышеуказанной

теоремы, получимъ:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i;$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Величина равнодѣйствующей и направленіе ея опредѣляются съ помощью формулъ:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

$$\cos(\angle X, \angle R) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

\*) Для построенія этихъ условій мы можемъ или изъ точки  $M$  провести двѣ прямыя  $MX'$  и  $MY'$ , параллельныя осямъ  $OX$  и  $OY$ , какъ представлено на чертежѣ, или изъ начала координатъ провести прямыя, параллельныя силамъ, въ соответствующую сторону.

$$\cos(\alpha, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ и лежащихъ въ одной плоскости, выражается двумя равенствами:

$$\sum X_i = 0.$$

$$\sum Y_i = 0.$$

*Примечаніе.* Задачи рѣшаются съ помощью построенія или соответствующаго вычисленія.

При этомъ, если въ задачу входятъ растягиваемыя нити, сжимаемые или растягиваемые стержни, нужно имѣть въ виду слѣдующее:

1) Если нить находится въ равновѣіи, то величина растягивающаго усилія въ каждой изъ ея точекъ одна и та же и равна величинѣ каждой изъ двухъ равныхъ силъ, приложенныхъ къ ея концамъ.

2) Если стержень находится въ равновѣіи, то величина растягивающаго или сжимающаго усилія во всѣхъ точкахъ стержня одна и та же и равна величинѣ одной изъ двухъ равныхъ силъ, приложенныхъ къ концамъ стержня.

### ГЛАВА III.

#### СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННЫЯ ВЪ РАЗНЫХЪ ТОЧКАХЪ ТѢЛА И ДѢЙСТВУЮЩІЯ ПО ЛИНІЯМЪ, ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

##### § 1.

Въ настоящемъ случаѣ, перенося точки приложенія силъ въ общую точку пересѣченія ихъ линій дѣйствія, мы приходимъ къ случаю, рассмотрѣнному въ предыдущей главѣ (черт. 15).



Чертежъ 15.

При рѣшеніи задачъ на сложение и разложеніе силъ посредствомъ построенія въ настоящемъ случаѣ представляются нѣкоторыя особенности тогда, когда

точка пересѣченія линій дѣйствія данныхъ силъ не помѣщается въ предѣлахъ чертежа.

Въ случаѣ трехъ силъ представляются слѣдующія задачи:

1) Найти равнодѣйствующую двухъ данныхъ силъ. 2) Даны: сила и одна составляющая, найти другую составляющую. 3) Даны: сила, линія дѣйствія одной ея составляющей и величина другой; найти величину первой и линію дѣйствія второй. 4) Даны: сила, линія дѣйствія одной ея составляющей и точка приложенія другой; найти величину первой, направленіе и величину второй.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ требуется только узнать, проходитъ ли равнодѣйствующая данныхъ силъ черезъ данную точку или нѣтъ, на примѣръ, въ вопросѣ о равновѣсіи рычага.



Рычагомъ называется твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось и подверженное дѣйствию силъ, направленныхъ въ одной плоскости, перпендикулярной къ оси.

На основаніи пятого принципа для равновѣсія рычага необходимо и достаточно, чтобы силы, къ нему приложенныя, имѣли равнодѣйствующую, которая проходила бы черезъ точку пересѣченія оси съ плоскостью силъ: онѣ будутъ тогда уравновѣшиваться реакціей оси.

При рѣшеніи вопросовъ о равновѣсіи рычага, и также многихъ другихъ вопросовъ, весьма полезно понятіе о моментѣ силы относительно точки.

## § 2. Моментъ силы относительно точки.

Опредѣленіе. Моментомъ силы относительно точки называется взятое со знакомъ плюсъ или минусъ произведеніе величины силы на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки на линію дѣйствія силы.

Моментъ силы  $F$  относительно точки  $O$  (черт. 16) обозначимъ черезъ  $m(F)$ ; тогда по опредѣленію будетъ:

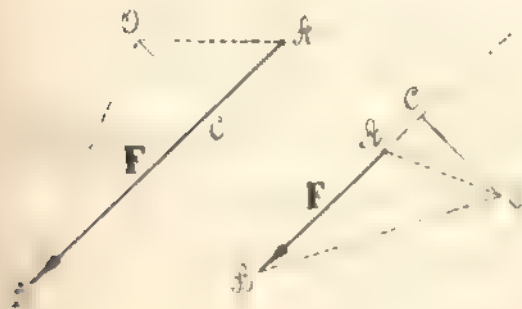
$$m(F) = \pm (OA \cdot OC).$$

слѣдовательно, равняется удвоенной площади треугольника  $OAB$ , взятой со знакомъ плюсъ или минусъ.

Точка  $O$ , относительно

которой находимъ моментъ силы, называется центромъ момента. Перпендикуляръ  $OC$  называется плечомъ момента.

При выраженіи момента берется знакъ плюсъ тогда, когда наблюдатель, стоящій въ центрѣ момента, на плоскости, перпендикуляр-



Чертежъ 16.



дикулярныя къ прямой  $\mathcal{KL}$ ; тогда

$$\text{пл.} \Delta OllA = \frac{1}{2} Oll.ma,$$

$$\text{пл.} \Delta OllB = \frac{1}{2} Oll.mb,$$

$$\text{пл.} \Delta OllC = \frac{1}{2} Oll.mc;$$

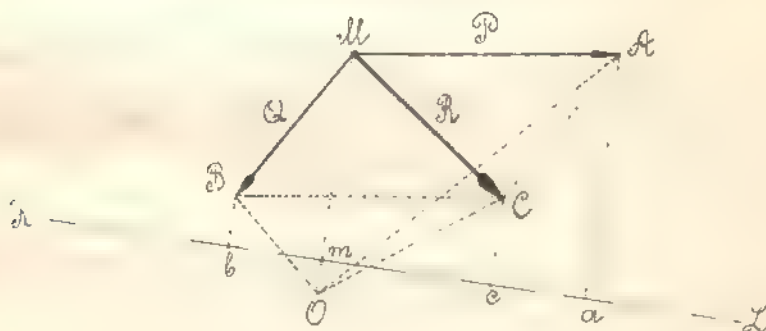
такъ какъ  $mb=ac$ , то  $mc=ma+mb$ , и слѣдовательно:

$$\text{пл.} \Delta OllC = \text{пл.} \Delta OllA + \text{пл.} \Delta OllB;$$

отсюда, обозначая слово "моментъ" буквою  $m$ , получаемъ:

$$m(R) = m(P) + m(Q).$$

Второй случай: моменты силъ  $P$  и  $Q$ , приложенныхъ въ точкѣ  $M$ , относительно центра  $O$  разныхъ знаковъ (черт. 18).



Чертежъ 18.

$Ma, Mb, Mc$  перпендикулярны къ  $\mathcal{KL}$ ;  $\mathcal{KL} \perp Oll$ .

$$\text{пл.} \Delta OllA = \frac{1}{2} Oll.ma,$$

$$\text{пл.} \Delta OllB = \frac{1}{2} Oll.mb,$$

$$\text{пл.} \Delta OllC = \frac{1}{2} Oll.mc;$$

такъ какъ  $mb=ac$ , то  $mc=ma-mb$ , и слѣдовательно

$$\text{пл.} \Delta OllC = \text{пл.} \Delta OllA - \text{пл.} \Delta OllB,$$

но



$$m(Q) = -2 \text{ пл. } \Delta Qll B;$$

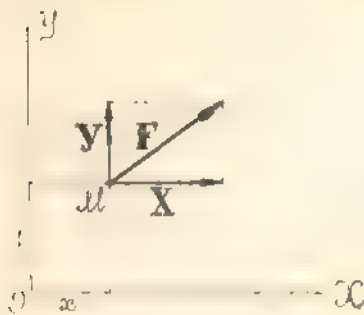
поэтому имеем:

$$m(J) = m(J') + m(Q).$$

Слѣдствія, вытекающія изъ теоремы Вариньона:

1) Съ помощью доказанной теоремы можно получить аналитическое выраженіе для момента силы относительно точки.

Центръ момента принимаемъ за начало координатныхъ осей  $OX$  и  $OY$  (черт. 19). Пусть будутъ  $x, y$  координаты точки приложения силы  $F$ , а  $X, Y$  - проекціи на оси координатъ.



Разложимъ силу  $F$  на двѣ составляющія, параллельныя координатнымъ осямъ; - онѣ будутъ равны  $X$  и  $Y$ ; тогда, обозначая слово "моментъ" буквою  $m$ , получимъ:

Чертежъ 19.

$$m(F) = m(X) + m(Y);$$

но, какъ видно изъ чертежа 19,

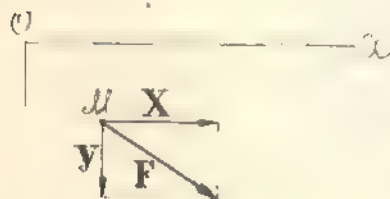
$$m(X) = X \cdot y, \quad m(Y) = -Y \cdot x,$$

а потому

$$m(F) = Xy - Yx.$$

Если ось  $OY$  имѣетъ противоположное направленіе (черт. 20),

то



$$m(F) = xY - yX.$$

2) Въ томъ случаѣ, когда число данныхъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, болѣе двухъ:  $F, F_1, F_2, \dots, F_n$ , мы применяемъ послѣдовательно теорему Вариньона, сначала къ равнодѣйствующей  $R$ , силъ  $F,$

Чертежъ 20.

и  $F_1$ , затѣмъ къ равнодѣйствующей  $R_2$  силъ  $F_1$  и  $F_2$  и т.д.; получаемъ слѣдующую теорему:

Моментъ равнодѣйствующей сколькихъ угодно силъ, направленныхъ въ одной плоскости по линіямъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ, относительно центра, лежащаго въ плоскости силъ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.

Отсюда мы заключаемъ, что для равновѣсія рычага при дѣйствіи силъ, направленныхъ по линіямъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментовъ силъ относительно точки, въ которой ось рычага пересѣкаетъ плоскость силъ, равнялась нулю, такъ какъ тогда моментъ равнодѣйствующей равенъ нулю, и, следовательно, линія

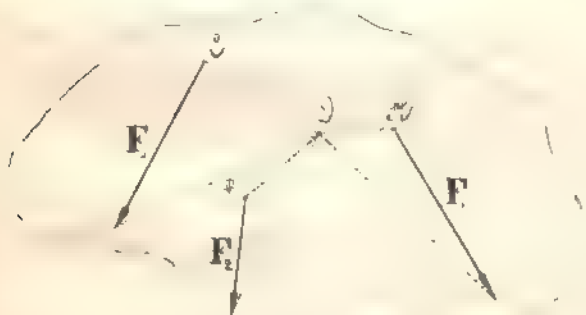
дѣйствія ея проходитъ черезъ неподвижную точку: напримѣръ, при дѣйствіи на рычагъ трехъ силъ  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  для равновѣсія необходимо существованіе равенства:

$$m(F_1) + m(F_2) + m(F_3) = 0.$$

причемъ центромъ момен-

товъ служитъ точка  $O$ .

въ которой ось рычага пересѣкаетъ плоскость чертежа (черт. 21).





а изъ подобія треугольниковъ  $\triangle PCH$  и  $\triangle CHK$  :  $\frac{PH}{CH} = \frac{PC}{CK}$  ; делимъ почленно одно равенство на другое и, принимая во вниманіе, что  $\angle PHK = \angle CKH$  , получаемъ:

$$\frac{PH}{CH} = \frac{PC}{CK} , \text{ или } \frac{P}{C} = \frac{PC}{CK} .$$

Слѣдовательно:

$$P \cdot CK = C \cdot PC .$$

Изъ равенствъ:  $\frac{P}{C} = \frac{Q}{CK}$  и  $R = P + Q$  слѣдуетъ:

$$\frac{P}{R} = \frac{Q}{R} = \frac{P}{P+Q} .$$

На основаніи послѣднихъ формулъ легко разложить данную силу  $R$  на двѣ, ей параллельныя и одинаково направленныя, составляющія:

1) Когда заданы величина и точка приложенія одной составляющей  $P < R$  ;

2) Когда заданы точки приложенія составляющихъ, лежація по обѣ стороны данной силы.

Любая изъ точекъ, лежащихъ на линіи дѣйствія равнодѣйствующей  $R$  , можетъ быть принята за точку ея приложенія; но только одна изъ нихъ, именно точка  $C$  , находящаяся на прямой  $AK$  , соединяющей точки приложенія составляющихъ  $P$  и  $Q$  , обладаетъ слѣдующимъ свойствомъ:

если силы  $P$  и  $Q$  будутъ повернуты вокругъ ихъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же уголъ въ одну и ту же сторону, то точка  $C$  сохранитъ свое положеніе, какъ видно изъ предыдущихъ формулъ, и равнодѣйствующая  $R$  будетъ повернута вокругъ нея на тотъ же уголъ.

Точка  $C$  называется *центромъ параллельныхъ силъ*  $P$  и  $Q$  .

Пусть  $x_1$  и  $y_1$  будутъ координаты точки  $P$  ,  $x_2$  и  $y_2$  - координаты точки  $Q$  ; точка  $C$  дѣлитъ разстояніе  $PK$  на части, обратно пропорціональныя силамъ  $P$  и  $Q$  ; поэтому, пользуясь



формулами аналитической геометрии для координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении и лежащей между концами отрезка, мы получимъ для координатъ  $x_c$  и  $y_c$  точки  $C$  слѣдующія выраженія:

$$x_c = \frac{Px_1 + Qx_2}{P + Q}, \quad y_c = \frac{Py_1 + Qy_2}{P + Q};$$

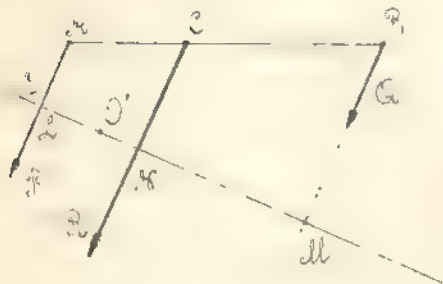
**Т е о р е м а .** Моментъ равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, относительно какого либо центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.

**Доказательство.**

**Первый случай:** моменты одинаковыхъ знаковъ. Центръ моментовъ  $C$  (черт. 23). Прямая  $CM$  перпендикулярна къ направленію силъ.

Имѣемъ:

$$P \cdot CL + Q \cdot CM = P(CL - LK) + Q(CL + KM) = \\ = (P + Q)CL + P \cdot LK - Q \cdot KM;$$



но

$$CL = CM,$$

а такъ какъ

$$AC : LK = BC : KM;$$

то

$$P \cdot LK = Q \cdot KM;$$

кроме того

$$P + Q = R,$$

получаемъ

**Чертежъ 23.**

$$P \cdot CL + Q \cdot CM = R \cdot CM.$$

**Второй случай:** моменты разныхъ знаковъ.

Центръ моментовъ  $C'$  (черт. 23): доказательство аналогичное предыдущему.

Въ обоихъ случаяхъ имѣемъ:

$$m(\mathcal{R}) = m(\mathcal{P}) + m(\mathcal{Q}).$$

§ 2. Какое угодно число параллельных силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ одну сторону.

Обозначимъ величины этихъ силъ черезъ  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \dots, \mathcal{P}_n$ , а координаты точекъ ихъ приложенія соответственно черезъ  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; \dots, x_n, y_n$ .

Примѣняя послѣдовательно правило предидущаго параграфа для сложения двухъ параллельныхъ силъ, сначала къ равнодѣйствующей  $\mathcal{R}_1$  силъ  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , затѣмъ къ равнодѣйствующей  $\mathcal{R}_2$  силъ  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{P}_3$  и т.д., мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Равнодѣйствующая сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной и той же плоскости и направленныхъ въ одну сторону, равна ихъ суммѣ

$$\mathcal{R} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \dots + \mathcal{P}_n,$$

и ея линія дѣйствія параллельна, направлена въ ту же сторону, и линія дѣйствія ея проходитъ черезъ точку, координаты которой  $x_c$  и  $y_c$  выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$x_c = \frac{\mathcal{P}_1 x_1 + \mathcal{P}_2 x_2 + \dots + \mathcal{P}_n x_n}{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_n};$$

$$y_c = \frac{\mathcal{P}_1 y_1 + \mathcal{P}_2 y_2 + \dots + \mathcal{P}_n y_n}{\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \dots + \mathcal{P}_n}.$$

Если силы  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$  повернемъ на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ ихъ точекъ приложенія, то равнодѣйствующая ихъ повернется на тотъ же уголъ вокругъ точки  $(x_c, y_c)$ , координаты которой выражаются только что написанными формулами.

Эта точка называется центромъ параллельныхъ силъ.

Примѣняя послѣдовательно теорему предидущаго параграфа о моментъ равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ, сначала къ

равнодействующей  $R$ , силъ  $P_1$  и  $P_2$ , затемъ къ равнодействующей  $R$ , силъ  $R$  и  $P_3$  и т. д., мы получаемъ:

*Моментъ равнодействующей сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ одну сторону, относительно центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра:*

$$m(R) = m(P_1) + m(P_2) + \dots + m(P_n).$$

### § 3. Дѣя неравныя параллельныя силы, направленныя въ разныя стороны.

Равнодействующая двухъ параллельныхъ силъ  $P$  и  $Q$ , направленныхъ въ разныя стороны, равна ихъ разности, имѣ параллельна, направлена въ сторону бѣльшей силы по линіи, которая проходитъ вѣ точекъ приложенія данныхъ силъ, со стороны бѣльшей силы, и дѣлитъ прямую, соединяющую эти точки, на части, обратно пропорціональныя силамъ.

*Доказательство.*

Даны: сила  $P$ , приложенная въ точкѣ  $A$ , и сила  $Q < P$ , приложенная въ точкѣ  $B$  (черт. 24) и направленная въ противоположную сторону.



Чертежъ 24.

Силу  $P$ , бѣльшую изъ данныхъ силъ, разлагаемъ на двѣ силы, ей параллельныя, изъ которыхъ одна,  $Q$ , приложена въ точкѣ  $B$ , равна  $Q$  и направлена въ сторону противоположную  $Q$ ; на основаніи параграфа 1 найдемъ вторую составляющую  $R$ ; сила  $R$ , приложенная въ точкѣ  $C$ , и будетъ иско-

момъ равнодействующей, такъ какъ силы  $Q$  и  $Q$ , какъ взаимно-

уравновѣшивающіяся, можемъ удалить.

Имѣемъ:

$$R \cdot d = Q, \quad P \cdot AC = Q \cdot BC, \quad \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

На основаніи этихъ формулъ легко разложить данную силу  $R$  на двѣ параллельныя составляющія, направленныя въ разные стороны:

1) когда задана вполнѣ одна составляющая, или большая, чѣмъ сила  $R$ , или направленная въ противоположную сторону;

2) когда заданы точки приложенія составляющихъ, лежація по одну сторону данной силы.

Пусть  $x_1$  и  $y_1$  будутъ координаты точки  $A$ ;  $x_2$  и  $y_2$  координаты точки  $B$ ; точка  $C$  дѣлитъ разстояніе  $AB$  на части, обратно пропорціональныя силамъ  $P$  и  $Q$ ; поэтому, пользуясь формулами аналитической геометріи для координатъ точки, дѣлящей данный отрезокъ въ данномъ отношеніи съ вѣшной стороны, мы получимъ для координатъ  $x_c$  и  $y_c$  точки  $C$  слѣдующія выраженія:

$$x_c = \frac{P x_1 - Q x_2}{P - Q},$$

$$y_c = \frac{P y_1 - Q y_2}{P - Q}.$$

Точка  $C$  называется центромъ параллельныхъ силъ  $P$  и  $Q$ ; при поворотѣ силъ  $P$  и  $Q$  на одинъ и тотъ же уголъ вокругъ точекъ  $A$  и  $B$  равнодѣйствующая ихъ  $R$  повернется на тотъ же уголъ вокругъ точки  $C$ .

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что опредѣленіе центра параллельныхъ силъ и полученныя выраженія его координатъ  $x_c$ ,  $y_c$  въ §§

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. МЯЧЕРСКИЙ.

Изданіе Москов. Взаимопомощи Студ. СВВ. Политехн. Института.

Типо-литографія И. Трофимова. СВВ. Мокшанская, 3.

Корректоръ А. Савинъ.

Листъ 3.



1 и 3, имѣютъ мѣсто и тогда, когда силы  $P$  и  $Q$  направлены по одной прямой (черт. 25), такъ какъ послѣдній случай можно разсматривать, какъ частный случай одного изъ предыдущихъ.



Чертежъ 25.



Чертежъ 26.

**ТЕОРЕМА.** Моментъ равнодѣйствующей двухъ неравныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны, относительно какого либо центра, лежащаго въ ихъ плоскости, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно того же центра.

Доказательство (черт. 26) подобно тому, которое изложено въ § 1.

#### § 4. Пара силъ.

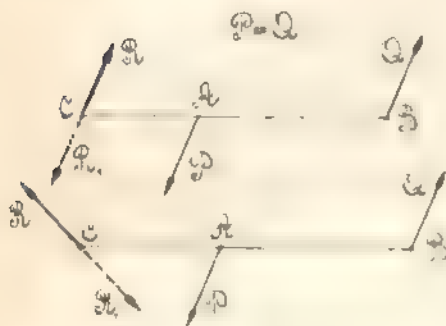
**ТЕОРЕМА.** Двѣ равныя параллельныя силы, направленные въ противоположныя стороны, не имѣютъ равнодѣйствующей въ ихъ плоскости.

**Доказательство.** Предполагаемъ, что равнодѣйствующая  $R$  существуетъ; тогда существуетъ и сила уравнивающаяся,  $P_1$ , равная и противоположная  $R$ ; между тѣмъ будетъ ли эта сила параллельна или непараллельна даннымъ силамъ  $P$  и  $Q$  (черт. 27) нетрудно видѣть, что равновѣсіе на основаніи принципа второго невозможно, и, слѣдовательно, предположеніе неvěрно.

Система двухъ равныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ противоположныя стороны, называется парой силъ.

Расстояние между линиями действия силъ пары, считаемое по перпендикуляру къ нимъ, называется *плечомъ* пары.

Точки приложенія силъ пары всегда можемъ перенести такъ,



Чертежъ 27.

что прямая, соединяющая эти точки, будетъ перпендикулярна къ силамъ.

**Теорема.** *Алгебраическая сумма моментовъ силъ пары относительно какого либо центра, лежащаго въ плоскости пары, равна произведенію величины одной*

*изъ силъ пары на плечо, взятому со знакомъ плюсъ, когда пара стремится вращать плоскость чертежа по часовой стрѣлкѣ, и со знакомъ минусъ - въ противоположномъ случаѣ.*

$$m(P) + m(Q) = Pa \quad (\text{черт. 28, лѣвый})$$

$$m(P) + m(Q) = -Pa \quad (\text{черт. 28, правый}).$$

Доказательство такое же, какъ въ §§ 1 и 3.



Чертежъ 28.

Произведение одной изъ силъ пары на плечо, взятое со знакомъ +, когда пара стремится вращать плоскость чертежа по часовой стрѣлкѣ,

и со знакомъ -, въ противоположномъ случаѣ, называется *моментомъ* пары, и предыдущая теорема можетъ быть выражена такъ: *алгебраическая сумма моментовъ силъ пары относительно какого либо центра, лежащаго въ плоскости, равна моменту пары.*

**теорема.** *Длины паръ на плечо не измѣняются, если плечо пары повернемъ въ въ плоскости на некоторый уголъ вокругъ одного изъ концовъ.*

Доказательство. Даны силы  $P$  и  $Q$  и плечо пары (черт. 29).

Пусть  $\mathcal{C}$  — новое положение плеча; присоединяемъ къ двумъ даннымъ силамъ  $P$  и  $Q$  четыре равныя имъ силы:  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$ ; натымъ силу  $P_1$ , равнодѣйствующую силѣ  $P$  и  $Q_1$ , и силу  $P_2$ , равнодѣйствующую силѣ  $Q$  и  $P_2$ , какъ силы равныя и направленныя по одной прямой\*) въ противоположныя стороны, удаляемъ;



Чертежъ 29.



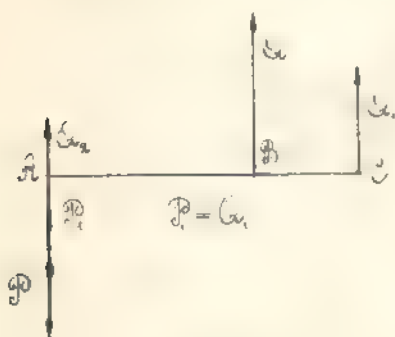
тогда получаемъ пару  $P_2Q_2$ , которая и будетъ эквивалентна парѣ  $PQ$ .

Слѣдствіе. Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если пару перенести въ какое угодно положеніе въ ее плоскости.

#### ТЕОРЕМА. Дѣйствіе

пары на тѣло не измѣнится, если измѣнить величины силъ и длину плеча такимъ образомъ, чтобы моментъ пары сохранилъ свою величину и знакъ.

Доказательство. Даны силы  $P = Q$  и  $AC$  плечо пары (черт.



Чертежъ 30.

30); разлагаемъ силу  $Q$  на двѣ силы:  $Q_1$ , приложенную въ произвольно выбранной точкѣ  $C$ , и  $Q_2$ , приложенную въ точкѣ  $A$ ; силы  $P$  и  $Q_2$  замѣняемъ ихъ равнодѣйствующей  $P_1$ ; получаемъ пару  $P_1Q_1$ , эквивалентную данной парѣ; при этомъ имѣемъ:

\*) Прямая  $AD$  есть биссектриса угловъ  $BAC$  и  $BDC$ ; по продолженіи она дѣлитъ пополамъ углы ромба, вписаннаго вершинами въ точки  $A$  и  $D$  и, следовательно, совпадаетъ съ линіями дѣйствія силъ  $P_1$  и  $Q_1$ .

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

Слѣдствіе изъ двухъ предыдущихъ теоремъ: еслѣ пары, лежащія въ одной плоскости, имѣющія одинъ и тотъ же моментъ, эквивалентны между собой.

Для того, чтобы сложить нѣсколько паръ, лежащихъ въ одной плоскости, мы преобразуемъ ихъ такъ, чтобы длина плеча была одна и та же; ватѣмъ перенесемъ такъ, чтобы плечи совпали, и сложимъ силы, направленныя по одной прямой.

Моментъ пары, полученной отъ сложения нѣсколькихъ паръ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагаемыхъ паръ.

Пусть даны пары силъ, изображенныя на чертежѣ 31.

Возьмемъ плечи, равныя  $b$ ; соответствующія силы будутъ:

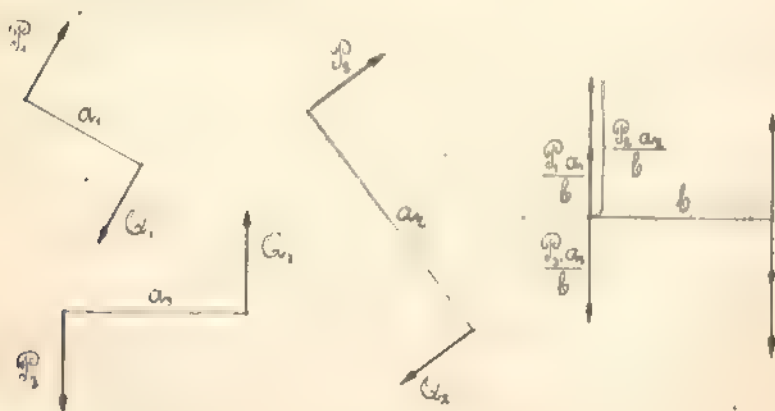
$$\frac{P_1 a_1}{b}, \frac{P_2 a_2}{b}, \frac{P_3 a_3}{b}$$

Сила пары, полученной отъ сложения, будетъ равна

$$\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3}{b}$$

а плечо ея равно  $b$ ; моментъ этой пары равенъ, слѣдовательно,

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3$$



Чертежъ 31.



§ 5. Какое угодно число параллельных силъ, лежащихъ въ одной плоскости и направленныхъ въ разныя стороны (черт. 32).

Находимъ двѣ равнодѣйствующія:  $R_1$  для силъ, направленныхъ въ одну сторону, и  $R_2$  для силъ, направленныхъ въ сторону противоположную; при этомъ могутъ представиться три случая.



Первый случай:  $P_1$  и  $P_2$  различны по величинѣ; складывая ихъ, получимъ равнодѣйствующую  $R$  всѣхъ данныхъ силъ;

Второй случай:  $P_1$  и  $P_2$  равны по величинѣ и направлены по двумъ параллельнымъ прямымъ — получается пара силъ;

Третій случай:  $P_1$  и  $P_2$  равны по

Чертежъ 32.

величинѣ и направлены по одной прямой;

данныя силы находятся въ равновѣсїи.

Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_n$  величины данныхъ силъ, взятая со знакомъ плюсъ, когда онѣ направлены въ одну сторону, и со знакомъ минусъ, когда онѣ направлены въ сторону противоположную; пусть  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots, x_n, y_n$  — координаты точекъ положенія данныхъ силъ.

Первый случай.

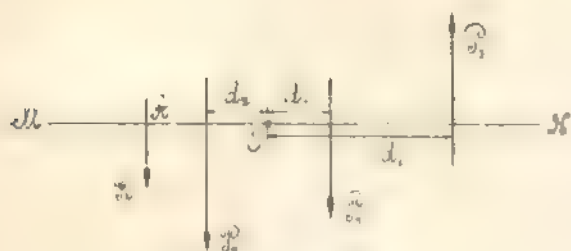
Въ первомъ случаѣ алгебраическая сумма

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n \neq 0$$

и опредѣляетъ какъ величину, такъ и направленіе (по знаку) равнодѣйствующей:

$$R_1 = \sum_{i=1}^n P_i.$$

Линію дії силъ равнодѣйствующей находимъ, пользуясь тѣмъ, что ея моментъ равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ силъ.



Чертежъ 33.

Возьмемъ гдѣ-ли-бо въ плоскости силъ центръ моментовъ  $O$  и проведемъ черезъ него прямую  $MN$ , перпендикулярную къ направлению силъ; плечи

силъ обозначимъ черезъ  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , приписывая имъ знакъ  $+$ , когда они отсчитываются отъ центра  $O$  въ одну сторону (напримѣръ, вправо), и знакъ минусъ, когда они отсчитываются въ противоположную сторону; при этомъ будемъ считать положительными величины тѣхъ силъ, которыя, при положительномъ плечѣ, имѣютъ положительный моментъ относительно точки  $O$  такъ напримѣръ, на прилагаемомъ чертежѣ 33: величины  $d_1, d_2, P_1, P_2$  берутся со знакомъ  $+$ ,  $d_3, P_3$  со знакомъ  $-$ . Тогда моментъ силъ  $P_1$ :

$$m(P_1) = P_1 d_1,$$

и плечо  $d$  равнодѣйствующей  $R$  находимъ по формулѣ:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n P_i d_i}{\sum_{i=1}^n P_i}.$$

Откладываемъ по  $MN$  отрезокъ

$$OA = d$$

въ ту или другую сторону отъ  $O$ , смотря по знаку  $d$ ; получимъ одну изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей.

Другой способъ для достиженія той же цѣли состоитъ въ томъ, что мы опредѣляемъ центръ данныхъ силъ, черезъ который линія дѣйствія должна проходить.

Координаты  $x_c$  и  $y_c$  центра данных параллельных сил выражаются формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1} P_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n-1} P_i}.$$

Для вывода этих формул пользуемся известными уже выражениями координат центра, какъ въ случаѣ сколькихъ угодно параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, такъ и въ случаѣ двухъ неравныхъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны.

### Второй случай.

Во второмъ случаѣ, когда данныя силы приводятся къ парѣ, алгебраическая сумма

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-1} P_i = 0.$$

Моментъ пары равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ силъ, слѣдовательно, эта сумма не равна нулю.

$$\text{Моментъ пары} = \sum_{i=1}^{n-1} P_i d_i.$$

Обозначимъ черезъ  $\alpha$  уголъ, составленный съ положительной осью  $OX$  направлениемъ одной изъ данныхъ силъ, величинѣ которой приписанъ знакъ плюс; тогда проекціи данныхъ силъ будутъ:

$$X_1 = P_1 \cos \alpha,$$

$$Y_1 = P_1 \sin \alpha,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_n = P_n \cos \alpha,$$

$$Y_n = P_n \sin \alpha.$$





личный угла поворота, а, следовательно, при всякой величине угла  $\alpha$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i y_i = 0. \quad *)$$

Если указанные три условия выполнены, равновѣсіе называется *основнымъ*.

## ГЛАВА V.

### КАНІА УГОДНО СИЛЪ ВЪ ПЛОСКОСТИ.

#### § 1. Сложеніе какихъ угодно силъ въ плоскости.

Пусть къ тѣлу приложены  $n$  силъ, направленныхъ какъ угодно въ одной плоскости (черт. 34).



Мы складываемъ первую силу со второй, равнодѣйствующую имъ съ третьей силой, найденную равнодѣйствующую съ четвертой и т. д., применяя или правило параллелограмма или правила сложения двухъ параллельныхъ силъ.

Чертежъ 34.

Такимъ образомъ мы найдемъ равнодѣйствующую данныхъ силъ, если только не встрѣтимся съ однимъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ.

\*) Второе изъ этихъ случаевъ находимъ, когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  или, когда  $\alpha = 0$ .

Первый случай: найдена равнодействующая  $R_k$  для  $k$  силъ, причемъ  $k < n-1$ , и оставшія  $n-k$  силъ:

$$F_1, F_2, \dots, F_n,$$

все пороены равны силѣ  $R_k$ , параллельны ей и направлены въ противоположную сторону.

Второй случай: найдена равнодействующая  $n-1$  силъ  $R_{n-1}$ , и послѣдняя изъ данныхъ силъ  $F_n$  равна  $R_{n-1}$  и направлена въ противоположную сторону по прямой, параллельной  $R_{n-1}$ , или по одной прямой съ  $R_{n-1}$ .

Въ первомъ случаѣ складываемъ силы  $F_1, F_2, \dots, F_n$  и имѣемъ равнодействующую ихъ съ силой  $R_k$ ; получаемъ такимъ образомъ равнодействующую всехъ данныхъ силъ.

Во второмъ случаѣ: если силы  $R_{n-1}$  и  $F_n$  направлены по двумъ параллельнымъ прямымъ, то мы имѣемъ пару силъ, эквивалентную данной системѣ; если же  $R_{n-1}$  и  $F_n$  направлены по одной прямой, то данная сила находится въ равновѣсіи.

Такимъ образомъ, когда къ тѣлу приложены сколько угодно силъ, направленныхъ какъ угодно въ одной плоскости, то все онѣ приводятся или къ одной силѣ, ихъ равнодействующей, или къ парѣ силъ, или же находятся въ равновѣсіи.

Въ какомъ бы порядкѣ мы ни складывали силы, результатъ будетъ, очевидно, одинъ и тотъ же.

Изъ предидущаго уже нетрудно вывести способы для сложения силъ въ плоскости, какъ съ помощью многоугольника силъ, такъ и съ помощью проекцій силъ.

Первый способъ.

Строимъ многоугольникъ силъ; нѣкоторые углы его могутъ быть  $0^\circ$  или  $180^\circ$ , а стороны могутъ пересѣкаться.

Первый случай: многоугольникъ силъ незамкнутъ.

Силы имѣютъ равнодействующую  $R$ ; ея величина и направле-

не изображаются замыкающей многоугольника силъ.

Линію дѣйствія силы  $R$  опредѣлимъ, пользуясь тѣмъ, что моментъ равнодѣйствующей относительно какой нибудь точки равенъ алгебраической суммѣ моментовъ всѣхъ данныхъ силъ относительно той же точки.

*Второй случай: многоугольникъ силъ замкнутъ.*

Силы приводятся къ парѣ или находятся въ равновѣсіи.

Находимъ алгебраическую сумму моментовъ данныхъ силъ относительно какой нибудь точки; если эта сумма не равна нулю, то силы приводятся къ парѣ; если же она равна нулю, то данныя силы находятся въ равновѣсіи.

*Второй способъ.*

Обозначимъ координаты точекъ приложенія силъ:

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$$

черезъ  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots, x_n, y_n$ ; а проекціи силъ на координатныя оси соответственно черезъ

$$X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots, X_n, Y_n.$$

*Первый случай. Суммы проекцій силъ:*

$$\sum_{i=1}^n X_i \text{ и } \sum_{i=1}^n Y_i$$

не равны нулю одновременно.

Существуетъ равнодѣйствующая  $R$ ; проекціи ея на координатныя оси обозначимъ черезъ  $X$  и  $Y$ .

Для опредѣленія величины и направленія равнодѣйствующей  $R$  имѣемъ:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$Y = \sum_{i=1}^n Y_i;$$

откуда

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} ,$$

$$\cos(\varphi, R) = \frac{X}{R} ,$$

$$\cos(\varphi, Z) = \frac{Y}{R} .$$

Для опредѣленія линіи дѣйствія равнодѣйствующей  $R$  найдемъ одну изъ точекъ, лежащихъ на этой линіи, именно ту, которая находится на прямой, проведенной черезъ начало координатъ перпендикулярно къ направленію силы  $R$  ; координаты искомой точки пусть будутъ  $x$  и  $y$ .

Сумму моментовъ данныхъ силъ относительно начала координатъ обозначимъ черезъ  $L$  , такъ что

$$L = \sum_{i=1}^n (X_i y_i - Y_i x_i) .$$

Тогда для опредѣленія  $x$  и  $y$  имѣемъ два уравненія:

$$X y - Y x = L ,$$

$$X x + Y y = 0 ,$$

изъ которыхъ первое выражаетъ, что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ, а второе - условіе вышеупомянутой перпендикулярности.

Рѣшая эти уравненія относительно  $x$  и  $y$  , находимъ:

$$x = - \frac{L Y}{X^2 + Y^2} ,$$

$$y = \frac{L X}{X^2 + Y^2} .$$

Второй случай. Суммы проекцій силъ:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0 ,$$



но сумма моментов:

$$\sum_{i=1}^n (X_i y_i - Y_i x_i) \neq 0 .$$

Въ этомъ случаѣ силы приводятся къ парѣ, моментъ которой равенъ

$$\sum_{i=1}^n (X_i y_i - Y_i x_i) .$$

Третій случай. Сумма проекцій силъ:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0 , \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0 ,$$

и сумма моментовъ силъ

$$\sum_{i=1}^n (X_i y_i - Y_i x_i) = 0 .$$

Въ этомъ случаѣ силы находятся въ равновѣсiи.

Замѣтимъ, что въ двухъ послѣднихъ случаяхъ сумма моментовъ данныхъ силъ не зависитъ отъ выбора центра моментовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $x_0$  и  $y_0$  будутъ координаты центра моментовъ, тогда моментъ силъ  $\Gamma$  будетъ:

$$X_i (y_i - y_0) - Y_i (x_i - x_0) ,$$

а потому сумма моментовъ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [X_i (y_i - y_0) - Y_i (x_i - x_0)] &= \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i y_i - Y_i x_i) - y_0 \sum_{i=1}^n X_i + x_0 \sum_{i=1}^n Y_i . \end{aligned}$$

откуда слѣдуетъ, что въ случаяхъ второмъ и третьемъ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [X_i (y_i - y_0) - Y_i (x_i - x_0)] &= \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i y_i - Y_i x_i) . \end{aligned}$$

## ГЛАВА VI.

### ГРАФИЧЕСКАЯ СТАТИКА.

Предметъ графической статики составляетъ рѣшеніе вопроса о равновѣсіи посредствомъ чертежа.

Построенія, указанія въ предыдущихъ главахъ, относятся уже къ графической статикѣ.

Основныя построенія графической статики суть *многоугольникъ силъ* и *веревочный многоугольникъ*.

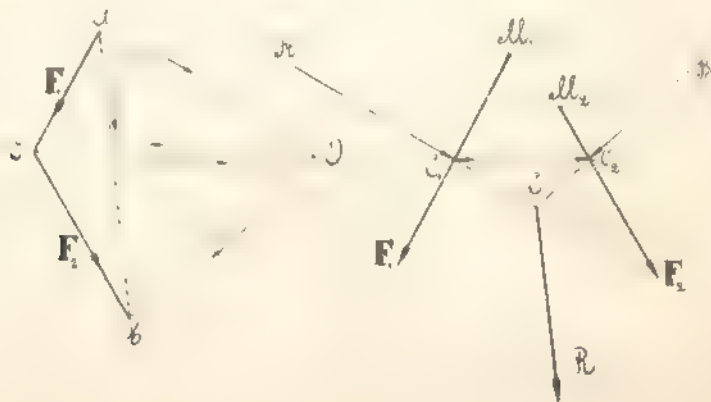
#### § 1. Сложеніе двухъ силъ.

*Первый случай:* две непараллельныя силы  $F_1$ ,  $F_2$ , приложенныя въ точкахъ  $M_1$  и  $M_2$  (черт. 35);

$$F_1 = ac.$$

$$F_2 = cb;$$

$M_1 F_1$  и  $M_2 F_2$  — линіи дѣйствія.



Черт. 35.

**Построение.** Строимъ многоугольникъ силъ  $acb$ , его замыкающую  $ab$ , и изъ произвольно выбранной точки  $O$  проводимъ линіи  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ ; точка  $O$  называется полюсомъ, а линіи  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$  — лучами многоугольника силъ.

Проводимъ изъ произвольно выбранной точки  $A$  прямую  $AC_1 \parallel ca$  до пересѣченія съ линіей дѣйствія силы  $F$  въ точкѣ  $C_1$ , изъ точки  $C_1$  прямую  $C_1C_2 \parallel cb$  до пересѣченія съ линіей дѣйствія силы  $F_1$  въ точкѣ  $C_2$  и, наконецъ,  $C_2B \parallel ab$ ; многоугольникъ  $AC_1C_2B$  называется веревочнымъ многоугольникомъ для данной системы силъ  $F$  и  $F_1$ .

Продолжаемъ крайнія стороны веревочнаго многоугольника  $AC_1$  и  $C_2B$  до пересѣченія въ точкѣ  $C$ , — эта точка есть одна изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей силъ  $F$  и  $F_1$ .

Прямая  $AC$  будетъ линіей дѣйствія равнодѣйствующей, а величина и направленіе ея изображаются замыкающей  $ab$ .

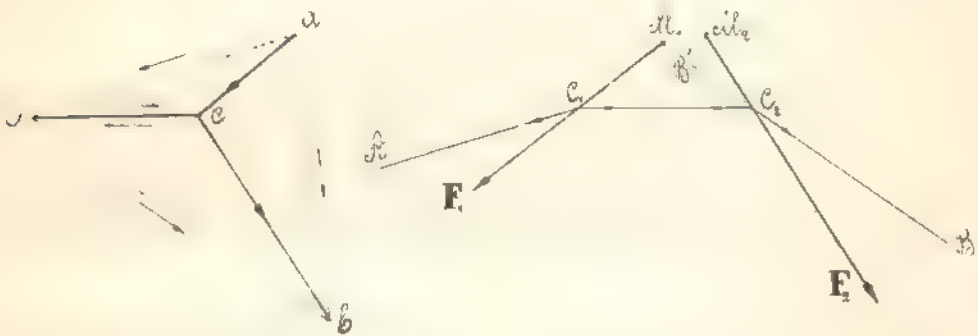
**Доказательство.** Точки приложенія силъ  $F$  и  $F_1$  переносимъ въ точки  $C_1$  и  $C_2$ ; изъ точки  $C_1$  силу  $F$ , разлагаемъ на двѣ составляющія по линіямъ  $AC_1$  и  $C_1C_2$ : величины и направленія ихъ изображаются лучами  $aO$  и  $Oc$ ; силу  $F_1$  разлагаемъ на двѣ составляющія по линіямъ  $C_1C_2$  и  $C_2B$ : величины и направленія ихъ изображаются лучами  $cO$  и  $Ob$ .

Такимъ образомъ, вмѣсто двухъ данныхъ силъ, получаемъ четыре имъ эквивалентныя, но двѣ изъ нихъ, дѣйствующія по линіямъ  $C_1C_2$ , взаимноуравновѣшиваются; слѣдовательно, данныя силы приводятся къ двумъ силамъ, линіи дѣйствія которыхъ суть крайнія стороны веревочнаго многоугольника:  $AC_1$  и  $C_2B$ , а величины и направленія изображаются крайними лучами многоугольника силъ:  $aO$  и  $Ob$ .

Отсюда слѣдуетъ, что точка  $C$  пересѣченія крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника находится на линіи дѣйствія равнодѣйствующей, а по правилу параллелограмма силъ находимъ, что величина и направленіе равнодѣйствующей изображается за-

мняющею  $ab$ .

*Примѣчаніе.* Многоугольникъ  $AC_1C_2B$  называется *веревочнымъ* на слѣдующемъ основаніи: если каждую изъ сторонъ  $AC_1$ ,  $C_1C_2$ ,  $C_2B$  одѣлать изъ веревки (нити или пѣли) и соединить ихъ узлами или шарнирами  $C_1$  и  $C_2$ , то такой многоугольникъ при дѣйствіи силъ  $F_1$  и  $F_2$ , приложенныхъ въ точкахъ  $C_1$  и  $C_2$ , будетъ въ равновѣсіи, если закрѣпить крайнія точки  $A$  и  $B$ .



Чертежъ 36.

Замѣтимъ, что при другомъ положеніи полюса  $O$ , какъ изображено на чертежѣ 36, многоугольникъ  $AC_1C_2B$  съ закрѣпленными концами  $A$  и  $B$ , при дѣйствіи силъ  $F_1$  и  $F_2$ , будетъ въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если стороны его будутъ негибкие стержни, соединенные шарнирами.

Если на чертежѣ 36 вторую крайнюю сторону проведемъ въ направленіи  $C_2B'$ , противоположномъ  $C_2B$ , то полученный многоугольникъ  $AC_1C_2B'$ , при закрѣпленныхъ концахъ  $A$  и  $B$  и при силахъ  $F_1$  и  $F_2$ , будетъ въ равновѣсіи, если стороны  $AC_1$  и  $C_1C_2$  — негибкие стержни, а  $C_2B'$  или стержень или веревка.

*Второй случай:* две параллельныя силы, направленные въ од-

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. В. В. МЕНДЕРСКИЙ.

Изданіе Кассы Взаимопомощи Студ. СПб. Политехн. Института.

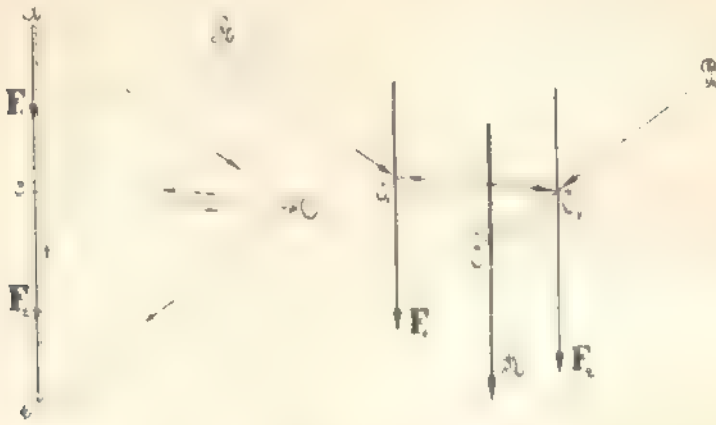
Типо-литографія И. Трофимова. СПб. Мохайская, 8.

Корректоръ А. Савателъ.

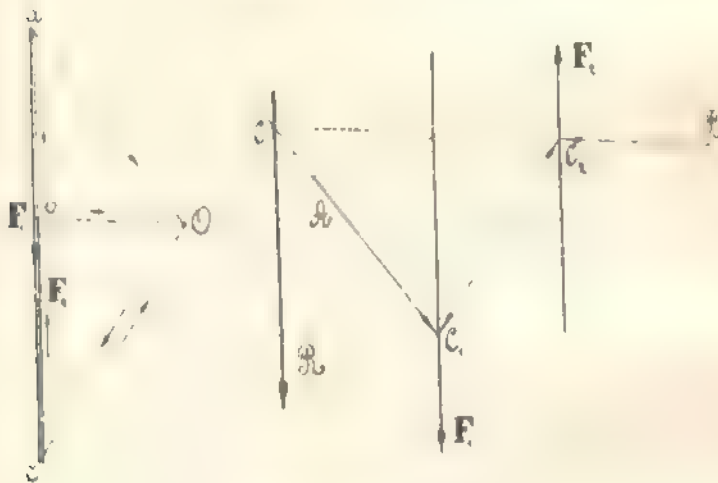
Листъ 4.

ну сторону (черт. 37) и въ разныя стороны (чертежъ 38).

Построеніе и доказательство ведутся на чертежахъ 37 и 38 такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.



Чертежъ 37.



Чертежъ 38.

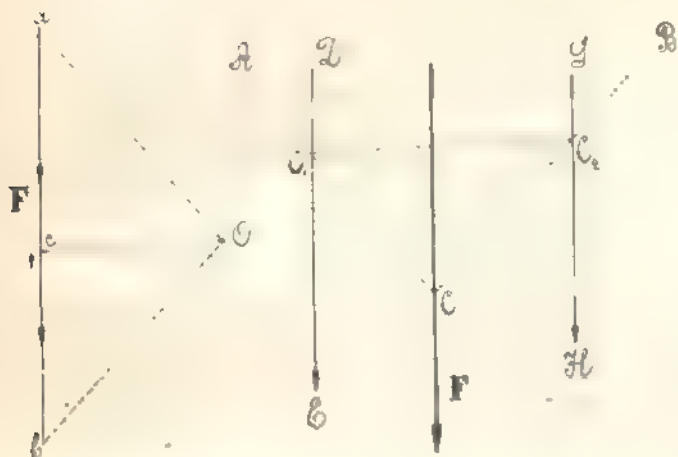
## § 2.

Разложеніе данной силы на двѣ составляющія мы можемъ произвести, имѣя въ виду вышеуказаннаго построенія.

Какъ примѣръ, разложимъ данную силу  $F$  (чертежъ 39) на двѣ составляющія, ей параллельныя, линіи дѣйствія которыхъ  $DE$  и  $GH$  заданы.



На линіи дѣйствія данной силы  $F$  беремъ произвольно выбранную точку  $C$  и проводимъ черезъ нее какія нибудь прямыя:  $CA$  и  $CB$ , пересѣкающія данную линію  $DE$  и  $GH$ ; точки пересѣченія  $C_1$  и  $C_2$  соединяемъ прямою  $C_1C_2$ .



Чертежъ 39.

Пусть  $ab$  изображаетъ величину и направленіе данной силы  $F$ ; проводимъ  $aO \parallel CA$ ,  $bO \parallel CB$  и черезъ точку ихъ пересѣченія  $O$  прямую  $OC \parallel C_1C_2$ ; точка  $C$  дѣлитъ  $ab$  на

части, которая, какъ это очевидно изъ предидущаго, изображаютъ величину и направленіе искомымъ составляющихъ силъ:  $ac$  по  $DE$  и  $cb$  по  $GH$ .

### § 3. Сложеніе нѣсколькихъ угодно силъ, направленныхъ какъ угодно въ одной плоскости.

Первый случай: многоугольникъ силъ не замкнутъ.

Пусть даны силы:  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ , приложенныя къ тѣлу въ точкахъ  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ , и  $acdefb$  многоугольникъ этихъ силъ (черт. 40).

Восстановіе. Произвольно выбранную точку  $O$  принимаемъ за полюсъ и проводимъ изъ нея лучи:  $Oa, Oc, Oe, Od, Of, Ob$ ; проведемъ затѣмъ:  $ac \parallel Oa, c_1c_2 \parallel Oc, c_2c_3 \parallel Od, c_3c_4 \parallel Oe, c_4c_5 \parallel Of, c_5c_6 \parallel Ob$ .

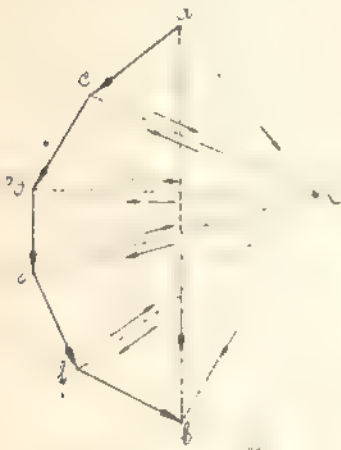
Многоугольникъ  $ac_1c_2c_3c_4c_5c_6$  называется веревочнымъ многоугольникомъ для данной системы силъ при полюсѣ  $O$ .\*)

\*) Вълѣдствіе того, что выборъ точекъ  $C$  и  $A$  находится въ

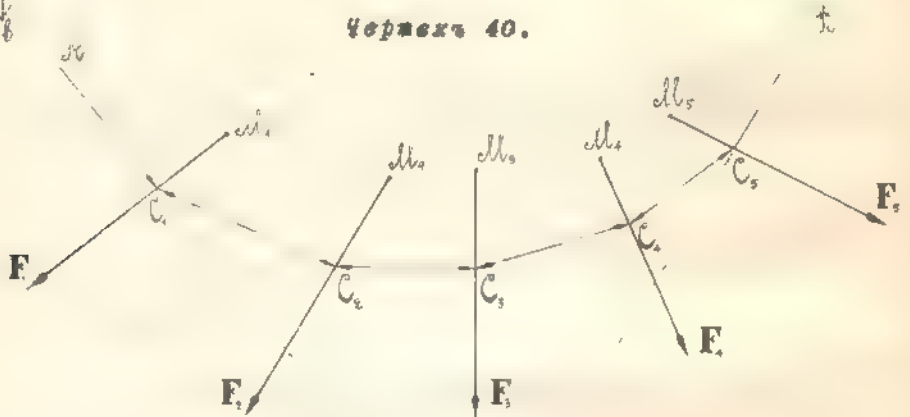
Продолжаемъ крайнія стороны  $AC$ , и  $CB$  до пересѣченія ихъ въ точкѣ  $C$ .

Прямая  $CD$ , проведенная черезъ точку  $C$  параллельно замыкающей многоугольника силъ  $ab$ , будетъ линіей дѣйствія равнодѣйствующей данныхъ силъ, а величина и направленіе равнодѣйствующей изображаются замыкающею  $ab$ .

**Доказательство.** Точки приложенія силъ переносимъ въ вершины веревочнаго многоугольника и затѣмъ каждую силу разлагаемъ на двѣ составляющія по прилежащимъ сторонамъ веревочнаго многоугольника; величины и направленія



Чертежъ 40.



этихъ составляющихъ изображаются параллельными имъ лучами.

Исключая силы взаимноуравновѣшивающіяся, мы

приводимъ данную систему силъ къ двумъ силамъ, линіи дѣйствія



нашемъ распоряженіи, для каждой системы силъ существуетъ безчисленное множество веревочныхъ многоугольниковъ.

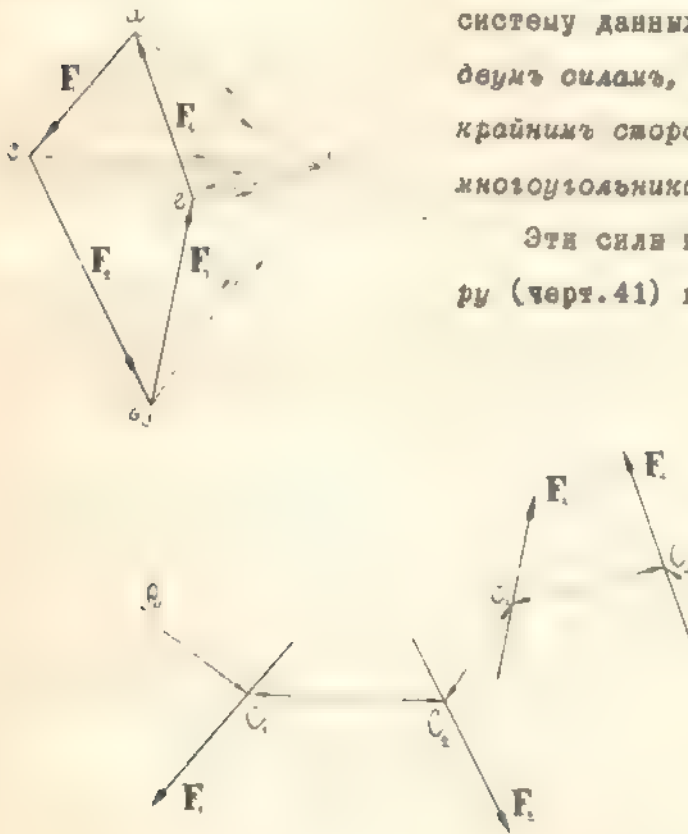
которых суть крайнія стороны вервочнаго многоугольника  $AC$  и  $CB$ , а величины и направленія изображаются крайними лучами:  $aO$  и  $Ov$ .

Отсюда уже слѣдуетъ, что точка  $C$  есть одна изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей, а величина и направленіе ея изображаются прямою  $av$ .

Второй случай: многоугольникъ силъ замкнутъ.

Примѣняя тотъ способъ построенія, который указанъ для предыдущаго случая, мы приводимъ систему данныхъ силъ также къ двумъ силамъ, направленнымъ по крайнимъ сторонамъ вервочнаго многоугольника.

Эти силы или составляютъ пару (черт. 41) или взаимноравно-



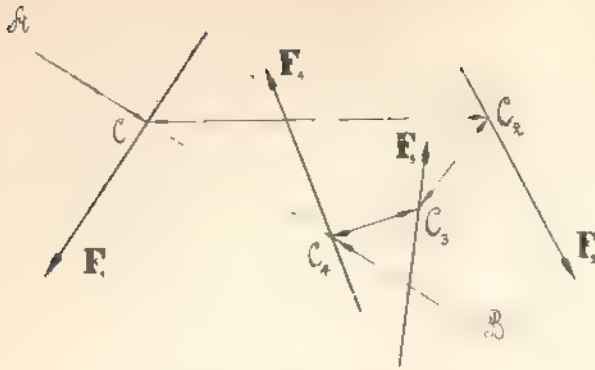
Чертежъ 41.

опиравшаяся (черт. 42).

Многоугольникъ силъ  $acbea$  общій для чертежей 41 и 42.

Но чертежъ 41 силы  $F_1, F_2, F_3, F_4$  приводятся къ парѣ силъ: одна изъ нихъ направлена по  $AC$ , другая по  $CB$ .

Величина силъ изображается лучемъ  $Ca$ .



Чертеж 42.

На черт. 42 силы  $F_1, F_2, F_3, F_4$  находятся въ равнове-  
стии: онѣ приводят-  
ся къ двумъ силамъ,  
равнымъ по величинѣ  
лучу  $OA$  и направ-  
леннымъ въ противо-  
положныя стороны по



Чертеж 43.

одной прямой  $AB$ , на кото-  
рой лежатъ крайнія стороны  
 $AC_1$  и  $C_4B$ .

#### § 4.

*Сложение параллельныхъ силъ.*

Для сложения силъ парал-  
лельныхъ примѣняется вышеу-  
казанное построение: многоу-  
гольникъ силъ (съ лучами) и

веревочный многоугольник; но въ этомъ случаѣ углы многоугольника силъ равны  $180^\circ$  или  $0^\circ$ , а потому мы откладываемъ по одной прямой послѣдовательно сначала величины всѣхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, а затѣмъ въ обратномъ направленіи величины силъ, направленныхъ въ сторону противоположную; — для большей ясности чертежа, вмѣсто одной упомянутой прямой, проводимъ иногда двѣ параллельныя прямия рядомъ; какъ на той, такъ и на другой прямой откладываютъ величины только тѣхъ силъ, которыя направлены въ одну сторону.

*Примѣръ.* На горизонтальной балкѣ, лежащей на двухъ опорахъ  $K$  и  $L$ , въ точкахъ  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  помѣщены грузы:  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$ ; найдемъ ихъ равнодѣйствующую  $R$  и определимъ давленіе балки на опоры (черт. 43).

Равнодѣйствующая  $R$  равна  $ab$  и линія дѣйствія ея проходитъ черезъ точку  $C$ .

Для опредѣленія давленій, направленныхъ по линіямъ  $KM$  и  $LP$ , крайнія стороны веревочнаго многоугольника  $ac$  и  $cd$  продолжаемъ до пересѣченія ихъ съ  $KM$  и  $LP$  въ точкахъ  $Z$  и  $E$ ; соединяемъ эти точки между собою и черезъ полюсъ  $O$  проводимъ прямую  $oa \parallel ZE$ ; тогда, какъ видно изъ § 2,  $oa$  изображаетъ величину давленія въ точкѣ  $K$  и  $xc$  — величину давленія въ точкѣ  $L$ .

## § 5. Равновѣсіе стержневого многоугольника.

Система тѣлъ, соединенныхъ шарнирами такъ, что каждый шарниръ соединяетъ только два тѣла, называется *стержневымъ многоугольникомъ*, потому что эти тѣла или на самомъ дѣлѣ стержни, или могутъ быть разсматриваемы какъ стержни.

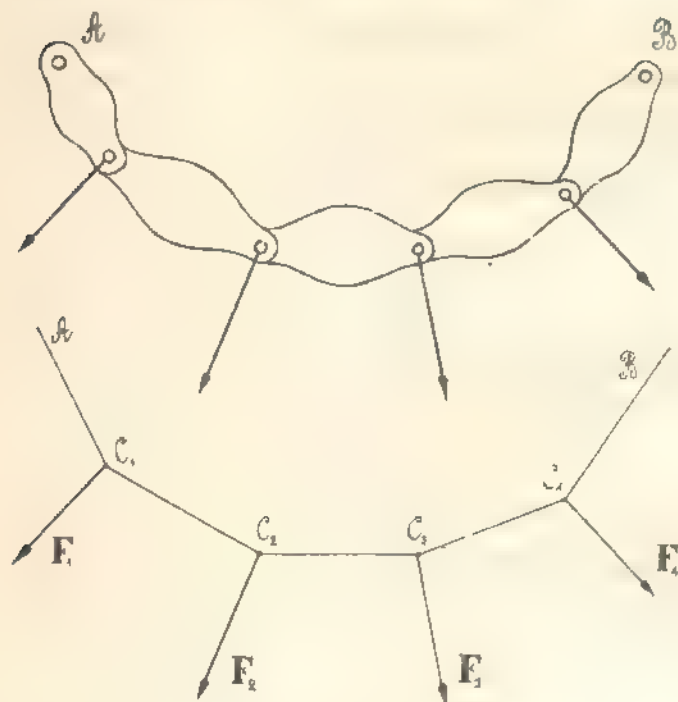
*Предполагаемъ:*

- 1) Оси шарнировъ параллельны между собою.
- 2) Давныя силы приложены только къ осямъ шарнировъ и на-



правлені въ одной плоскости, перпендикулярной къ направленію осей (черт. 44).

Въ этой плоскости мы и будемъ вести рѣшеніе вопроса о равновѣсіи стержневого многоугольника, предполагая, что крайнія его точки закрѣплены.



Чертежъ 44.

"Направленіемъ стержня" мы называемъ направленіе прямой, соединяющей оси двухъ шарнировъ, находящихся на концахъ стержня; для крайняго стержня одинъ изъ шарнировъ замѣняется закрѣпленной точкой.

На каждый стержень дѣйствуютъ только двѣ

силы, именно: реакція осей двухъ шарнировъ для промежуточнаго стержня; реакція оси одного шарнира и реакція закрѣпленной точки для крайняго стержня.

На ось каждаго шарнира дѣйствуютъ три силы: данная сила и реакціи двухъ сосѣднихъ стержней; — по принципу 6-му эти реакціи равны и противоположны реакціямъ оси шарнира на сосѣдніе стержни.

Для равновѣсія стержневого многоугольника, очевидно, необходимы и достаточны два условія:

- 1) каждая изъ данныхъ силъ должна уравновѣшиваться реак-

ціями двох сусідніх стержней;

2) каждая двѣ реакціи, приложенія къ одному стержню должны быть равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны.

Изъ этихъ условій заключаемъ, что составляющія данной силы по направленіямъ двухъ сусідніх стержней и будутъ реакціи оси шарнира на эти стержни; замѣтивъ, что реакціи осей крайнихъ шарнировъ на крайніе стержни уравниваются реакціями закрѣпленныхъ точекъ, мы, на основаніи условія 2-го, получаемъ слѣдующее необходимое и достаточное *условіе равновсія стержневого многоугольника*:

послѣ того, какъ каждая изъ данныхъ силъ будетъ разложена по направленіямъ двухъ сусідніх стержней, каждая двѣ составляющія, направленія по одному и тому же промежуточному стержню, должны быть равны и противоположны.

Изъ предидущаго мы знаемъ, что, если стержневой многоугольникъ  $\hat{A}C_1C_2C_3C_4C_5$  представляетъ одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ для данной системы силъ  $F_1, F_2, F_3, F_4$ , то указанія условія выполнены; докажемъ, что оно выполняется только въ этомъ случаѣ, т.е. только тогда, когда стороны  $AC_1, C_1C_2, C_2C_3, C_3C_4, C_4C_5$  соответственно параллельны лучамъ многоугольника силъ  $Oa, Ob, Oc, Od, Oe$ , (черт.45).

Разлагаемъ каждую изъ силъ:  $F_1, F_2, F_3, F_4$  на двѣ составляющія по направленіямъ сусідніх стержней; для этого строимъ треугольники (черт.46):

$$a,b,O, \text{ гдѣ } ab \parallel F_1, aO \parallel AC_1, bO \parallel C_1C_2;$$

$$a_1b_1O_1, \text{ гдѣ } a_1b_1 \parallel F_2, a_1O_1 \parallel C_1C_2, b_1O_1 \parallel C_2C_3;$$

$$a_2b_2O_2,$$

$$a_3b_3O_3;$$

причемъ должно быть

$$b_1 Q_1 = a_1 Q_2,$$

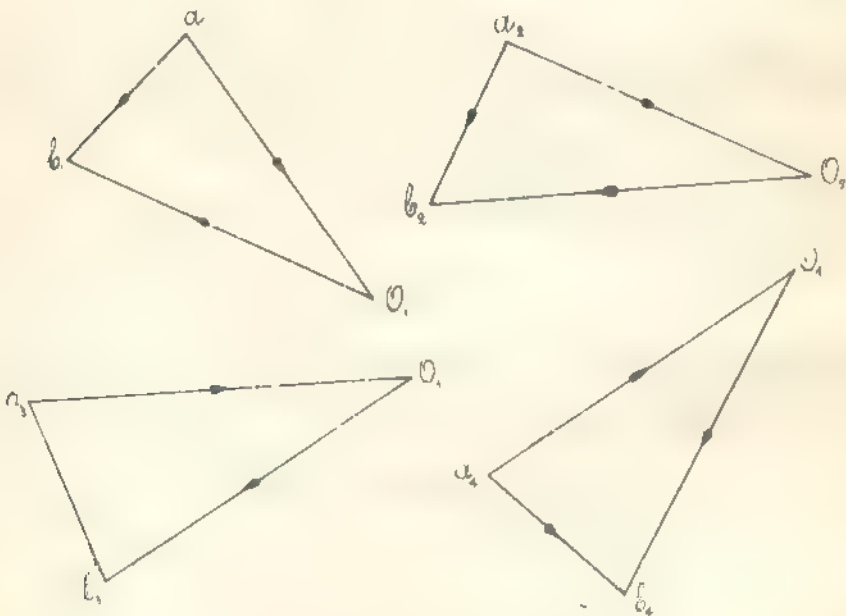
$$b_2 Q_2 = a_2 Q_3,$$

$$b_3 Q_3 = a_3 Q_4;$$

соединяя построенные треугольники такъ, чтобы равныя стороны совпали, мы и получимъ чертежъ 45, который называется *многоугольникомъ Вариньона*.



Чертежъ 45.



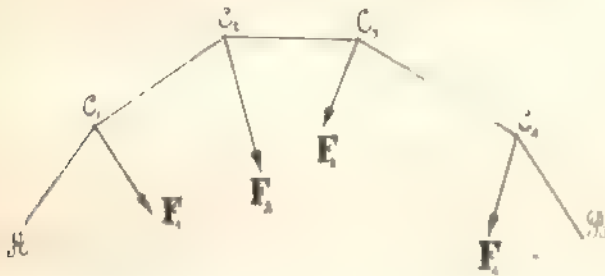
Чертежъ 46.

Приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію:

Для равновесія стержневого многоугольника необходимо и достаточно, чтобы онъ представлялъ одинъ изъ веревочныхъ многоугольниковъ для данныхъ силъ.

Каждый из стержней многоугольника въ положеніи равновѣсія или растягивается или сжимается; на чертежѣ 44 всѣ стержни растягиваются; на чертежѣ 47 всѣ стержни сжимаются; на чертежѣ 48 одни стержни растягиваются, другіе сжимаются.

Лучъ многоугольника силъ, параллельный данному стержню, изображаетъ величину и направленіе того усилія, которое растягиваетъ или сжимаетъ этотъ стержень.



Чертежъ 47.



Чертежъ 48.

Замѣтимъ, что каждый изъ растягиваемыхъ стержней можно замѣнить нитью, веревкою или цѣпью.

Задача: найти форму стержневого многоугольника въ положеніи равновѣсія: — будетъ определено, если, на-

примѣръ, даны величины и направленія силъ и длины стержней, или если даны линіи дѣйствія силъ, направленіе крайнихъ стержней и длина одного промежуточнаго стержня.

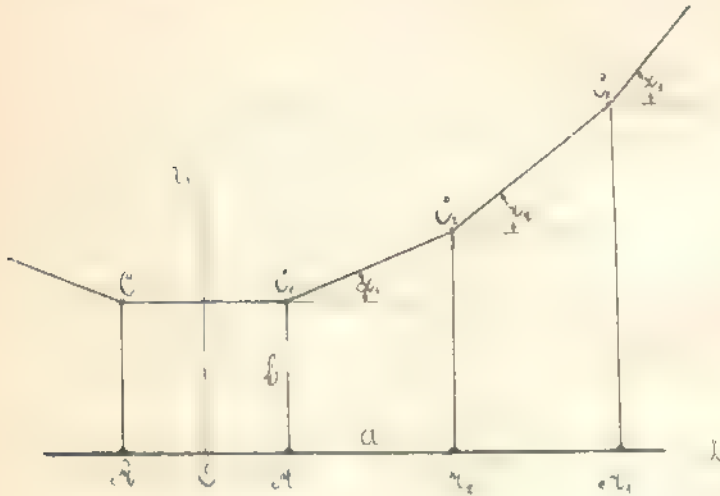
Примѣчаніе. Если крайнія точки стержневого многоугольника не закрѣплены, то въ положеніи равновѣсія къ нимъ должны быть приложены силы, соотвѣтственно равныя и противоположныя тѣмъ реакціямъ, которыя крайніе стержни испытываютъ со стороны шарнировъ.

Примѣръ. Определить форму равновѣсія стержневого многоугольника, поддерживающаго висячій мостъ.

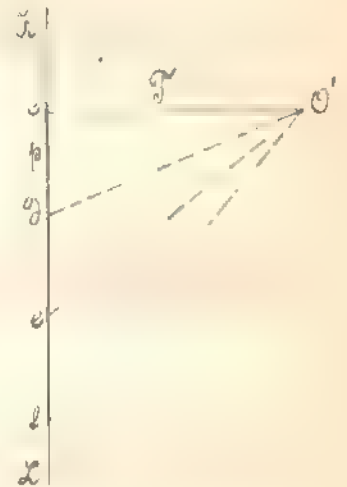
При этомъ предполагается:

1) многоугольник симметричен относительно середины моста и средний стержень горизонтален;

2) вертикальные тяги, поддерживающія помостъ, находятся на равномъ разстояніи  $a$  другъ отъ друга и одинаково нагружены вѣсомъ  $p$ ; число тягъ  $2n$ , высота двухъ среднихъ тягъ  $b$ , высота крайнихъ тягъ или соответствующихъ береговыхъ устоевъ  $h$ .



Чертежъ 49.



Чертежъ 50.

Вслѣдствіе симметріи достаточно опредѣлить положеніе вершинъ одной половины многоугольника (черт.49).

Координаты вершинъ  $c_k$  будутъ:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k+1)a,$$

$$y_k = b + a(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + \operatorname{tg} \alpha_k),$$

гдѣ  $\alpha_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, n$ ) уголъ, составляемый сторонами  $c_k c_{k+1}$  съ горизонтомъ.

Пусть  $T = c_0 c_1$  (черт.50) будетъ усиліе, растягивающее средний стержень  $c_0 c_1$ ; тогда, отложивъ на прямой  $XZ$ , перпендикулярной къ направленію  $O'c$ , длины

$$x_0 = 0, x_1 = a, \dots, x_n = p.$$



и проведя лучи:  $O\alpha$ ,  $O'e$ ,  $O'f$ .....получимъ многоугольникъ  
Вариансона и будемъ имѣть

$$\begin{aligned} & O\alpha_1 = O'e, \\ & O\alpha_2 || O'e, \\ & O\alpha_3 || O'e, \\ & O\alpha_4 || O'e, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

отсюда получаемъ

$$O\alpha_1 = O'e.$$

слѣдовательно:

$$y_k = b + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{2}.$$

Изъ уравненія

$$h = b + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

опредѣляемъ  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = \frac{a^2}{h-b} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$x_k = \frac{a}{2} + (k-1)a,$$

$$y_k = b + \frac{a^2}{n(n-1)} (k-1).$$

Нетрудно показать, что вершины многоугольника лежатъ на  
параболѣ; исключая число  $n$  изъ двухъ предыдущихъ уравненій,  
мы получимъ уравненіе кривой второго порядка, именно, параболы.

Усилие, растягивающее стержень  $O_1O_2$ ..., равно

$$\sqrt{\mathcal{T}^2 + i^2 b^2}.$$



тежъ 52).

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что въ настоящемъ случаѣ многоугольникъ силъ не будетъ плоскимъ, поэтому предыдущій чертежъ, какъ и всѣ послѣдующіе чертежи, относящіеся къ статикѣ въ пространствахъ, имѣютъ только условное значеніе.

Вспоминая то, что было выше изложено относительно геометрическаго сложенія векторовъ, мы можемъ высказать слѣдующую теорему: равнодѣйствующая сколькихъ угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, равна по величинѣ и направленію геометрической суммѣ этихъ силъ.

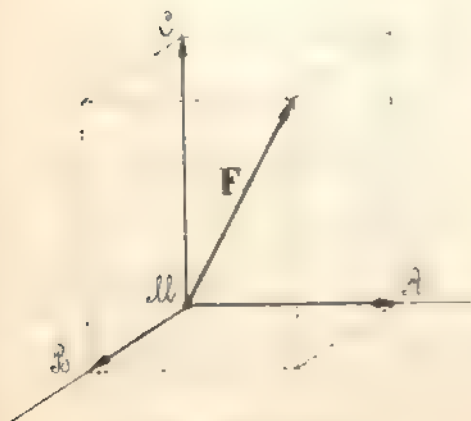
Въ случаѣ трехъ силъ равнодѣйствующая изображается діагональю параллелепипеда, востроеннаго на этихъ силахъ (чертежъ 53): діагональ  $MC$  есть замыкающая многоугольника  $MABC$ .



Чертежъ 53.

Разложеніе данной силы на  $n$  составляющихъ, не лежащихъ въ одной съ нею плоскости, будетъ вполне определеннымъ, — какъ видно изъ многоугольника силъ, если даны величины и направленія  $(n-1)$  составляющихъ; на разложеніе будетъ определеннымъ также и въ некоторыхъ

случаяхъ, напримѣръ, тогда, когда мы разлагаемъ данную силу на три составляющія по тремъ даннымъ прямымъ; если эти прямыя взаимноперпендикулярны, то составляющія равны по величинѣ проекціямъ данной силы (черт. 54).



Чертежъ 54.

Для равновесія силъ въ

рассматриваемомъ случаѣ необходимо и достаточно, чтобы много-  
угольникъ силъ былъ замкнутъ.



Все вопросы о сложении, разложении и равновѣсіи силъ, при-  
ложенныхъ въ одной точкѣ, могутъ быть рѣшаемы съ помощью про-  
екцій силъ на нѣкоторыя оси; для большей простоты эти оси бе-  
рутся обыкновенно взаимноперпендикулярными.

Способъ проекцій имѣетъ особенно важное значеніе для ста-  
тики въ пространствахъ.

Примѣняя известную геометрическую теорему относительно  
проекцій замыкающей какого угодно многоугольника (плоскаго  
или неплоскаго) къ многоугольнику силъ, мы получаемъ слѣдую-  
щую теорему статики:

*проекція равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ въ одной точ-  
кѣ, на всякую ось равна суммѣ проекцій составляющихъ на ту же  
самую ось.*

Возьмемъ три взаимноперпендикулярныя оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ ;  
обозначимъ проекціи на эти оси силъ:

$F_1$  черезъ  $X_1, Y_1, Z_1$ ,

$F_2$  черезъ  $X_2, Y_2, Z_2$ ,

.....

$F_n$  черезъ  $X_n, Y_n, Z_n$ .

Пусть будутъ  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  углы, которые сила  $F_1$  образу-  
етъ съ прямыми, проведенными черезъ точку приложенія  $M$  па-  
раллельно осямъ  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  (черт. 55); тогда имѣемъ:

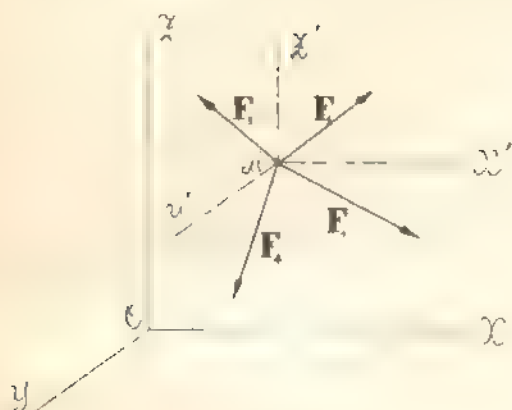
$$X_1 = F_1 \cos \alpha_1,$$

$$Y_1 = F_1 \cos \beta_1,$$

$$Z_i = F_i \cos \gamma_i ;$$

причемъ

$$\cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i = 1 ;$$



Чертежъ 35.

буква  $i$  обозначаетъ любое изъ чиселъ 1, 2, 3, .....  $n$ .

Обозначаемъ равнодѣйствующую черезъ  $R$ , а проекціи ея на взятія нами оси черезъ  $X, Y, Z$ ; тогда будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \\ Z &= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots$$

Зная  $X, Y, Z$ , мы найдемъ величину равнодѣйствующей по формулѣ:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} ;$$

а направленіе равнодѣйствующей, именно, углы, которые она составляетъ съ направленіями осей, по формуламъ:

$$\cos(R, OX) = \frac{X}{R} ,$$

$$\cos(R, OY) = \frac{Y}{R} .$$

$$\cos(R, OZ) = \frac{Z}{R} .$$



Если будутъ заданы: сила  $R$  и  $(n - 1)$  ея составляющихъ, то по формуламъ (1) найдемъ проекціи  $n$ -ой составляющей:

$$X = X - X_1 - X_2 - \dots - X_{n-1},$$

$$Y = Y - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_{n-1},$$

$$Z = Z - Z_1 - Z_2 - \dots - Z_{n-1}.$$

Условіе, необходимое и достаточное для равновесія силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, состоитъ въ томъ, что

$$R = 0.$$

слѣдовательно,

$$X = 0.$$

$$Y = 0.$$

$$Z = 0,$$

а потому оно выражается слѣдующими тремя равенствами (2):

$$\left. \begin{aligned} X + X_1 + \dots + X_n &= 0 \\ Y + Y_1 + \dots + Y_n &= 0 \\ Z + Z_1 + \dots + Z_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

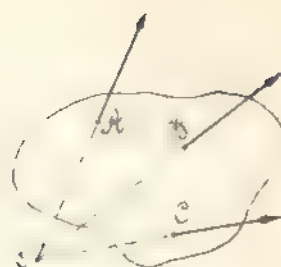
§ 2. Силы, приложенныя въ разныхъ точкахъ тѣла, но направленныя по прямымъ, пересѣкающимся въ одной точкѣ.

Точка пересѣченія линій дѣйствія силъ можетъ находиться внутри тѣла или на его поверхности (черт.56), но можетъ быть и внѣ тѣла (черт.57); - въ послѣднемъ случаѣ мы рассматриваемъ эту точку, какъ неизмѣнно съ тѣломъ связанную.

Переносимъ точки приложенія силъ въ точку пересѣченія ихъ линій дѣйствія и такимъ образомъ приходимъ къ случаю, разсмотрѣнному въ предыдущемъ параграфѣ.



Чертежъ 56.



Чертежъ 57.

## ГЛАВА VIII.

### ПАРА СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

#### § 1.

Въ статикѣ на плоскости были доказаны двѣ теоремы относительно тѣхъ измѣненій пары, при которыхъ дѣйствіе ея на тѣло не измѣняется; докажемъ теперь третью теорему:

*Дѣйствіе пары на тѣло не измѣнится, если перенести пару въ плоскость, параллельную ея первоначальной плоскости, причѣмъ плечо пары въ новомъ положеніи будетъ параллельно плечу въ положеніи первоначальномъ.*

**Доказательство.** Пусть  $A'B'$  новое положеніе плеча  $AB$  (черт. 58); присоединяемъ къ двумъ даннымъ силамъ  $P$  и  $Q$  четыре равныя имъ силы  $F_1, F_2, F_3, F_4$ ; замѣняемъ силы  $P$  и  $F_1$  ихъ равнодѣйствующей  $R_1$ , а силы  $Q$  и  $F_2$  ихъ равнодѣйствующей  $R_2$ ; очевидно

$$R_1 = R_2;$$

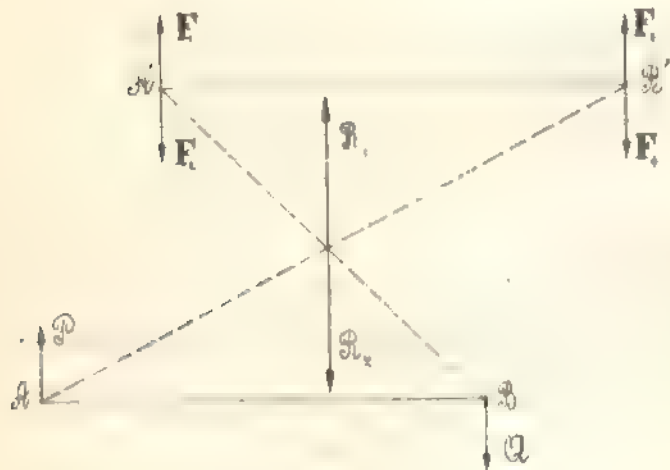
удалая взаимноуравновѣшивающіяся силы  $R_1$  и  $R_2$ , получаемъ пару силъ  $F_3$  и  $F_4$ , которая и будетъ эквивалентною данной парѣ

силъ  $P$  и  $Q$ .

Принимая во вниманіе первую изъ упомянутыхъ теоремъ о парахъ и теорему только что доказанную, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Дѣйствіе пары на тѣло не измѣняется, если перенести ее въ любое положеніе, лишь бы только плоскость пары въ новомъ положеніи была параллельна плоскости ея въ положеніи первоначальномъ.

Съ помощью указаннаго слѣдствія можно доказать, что пара не имѣетъ равнодѣйствующей въ пространствѣ.



Чертежъ 58.

Въ самомъ дѣлѣ, если осуществитъ равнодѣйствующая, то она или пересѣкаетъ плоскость пары или ей параллельна; сила, равная и противоположная равнодѣйствующей, должна уравновѣшивать нару; перенесемъ пару такъ, чтобы одна изъ ея силъ пересѣкла предполагаемую уравновѣливающую силу; тогда уже нетрудно видѣть, что равновѣсіе и въ томъ и въ другомъ случаѣ невозможно.

На основаніи трехъ доказанныхъ теоремъ мы приходимъ къ слѣдующему общему заключенію:

На основаніи трехъ доказанныхъ теоремъ мы приходимъ къ слѣдующему общему заключенію:

Дѣйствіе пары на тѣло не измѣняется, если замѣнить ее другою парой идѣ либо въ ея плоскости или въ плоскости ей параллельной, лишь бы только новая пара стремилась вращать тѣло въ ту же сторону и произведеніе силы на плечо имѣло прежнюю величину.

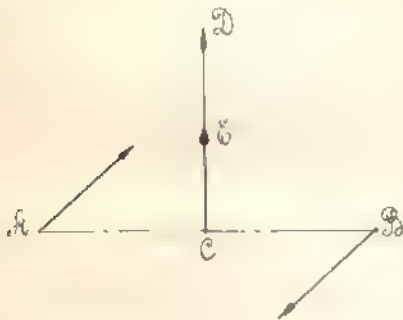
личину.

Такимъ образомъ неизмѣнны только слѣдующія свойства данной пары:

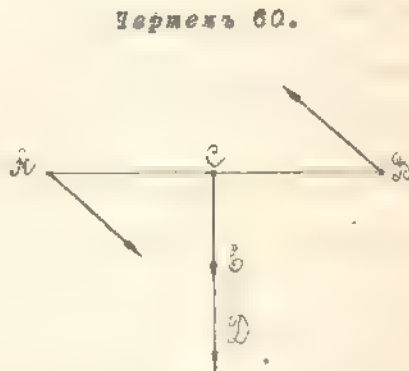
- 1) направленіе перпендикуляра въ плоскости пары;
- 2) сторона, въ которую пара стремится вращать тѣло;
- 3) произведеніе одной изъ силъ пары на плечо ея.

Эти свойства могутъ быть изображены графически.

Изъ какой-либо точки  $C$  проводимъ перпендикуляръ  $CD$  (чертежъ 59 и 60)\*) къ плоскости пары въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположеннаго по направленію этого перпендикуляра, вращеніе, которое пара стремится сообщить тѣлу, проходило слѣва направо, т.е. по часовой стрѣлкѣ; — прямая  $CD$  называется осью пары.



Чертежъ 59.



Чертежъ 60.

Векторъ  $\vec{CB}$ , направленный по оси пары и имѣющій величину, равную произведенію одной изъ силъ пары на ея плечо, называется линейнымъ моментомъ пары.

На основаніи предыдущаго можемъ сказать, что пара вполне характеризуется ея\*\*) линейнымъ моментомъ.

\*) Въ чертежахъ 59 и 60 точка  $C$  находится въ срединѣ плеча пары, но она можетъ быть взята гдѣ угодно, напримѣръ, въ томъ или другомъ концѣ плеча или въ точкѣ, не лежащей на плечи.

\*\*) Слово "линейный" часто опускается.

## § 2.

**ТВОРЕНІА.** Линейный моментъ пары, полученной отъ сложения нѣсколькихъ паръ, равенъ по величинѣ и направленію геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ слагаемыхъ паръ.

(Короче: моментъ равнодѣйствующей пары равенъ геометрической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ).

**Доказательство.**

**Первый случай,** — плоскости паръ параллельны.

Переносимъ пары въ одну плоскость и приводимъ ихъ къ одному плечу; окладывая затѣмъ силы, приложенныя какъ на одномъ, такъ и на другомъ концѣ общаго плеча, получаемъ равнодѣйствующую пару, моментъ которой равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ паръ, а сумма алгебраическая представляетъ частный случай суммы геометрической.

**Второй случай** — плоскости паръ пересекаются.

Пусть даны двѣ пары, плоскости которыхъ пересекаются. Приводимъ эти пары къ одному плечу  $AB$  (черт. 61), лежащему на линіи пересѣченія плоскостей данныхъ паръ \*); получаемъ пары  $(P, Q)$  и  $(P', Q')$ ; складывая силы  $P$  и  $P'$ , приложенныя въ точкѣ  $A$ , а также силы  $Q$  и  $Q'$ , приложенныя въ точкѣ  $B$ , находимъ равнодѣйствующую пару  $(R, R')$ ; доказываемъ затѣмъ, что діагональ параллелограмма, построеннаго на моментахъ  $RC'$  и  $SD'$  данныхъ паръ, изображаетъ величину и направленіе момента пары, полученной отъ сложения.

**Доказательство.** Моменты  $RC'$  и  $SD'$  лежатъ въ плоскости

\*) Для удобства чертежа предполагаемъ, что плечо  $AB$  перпендикулярно къ плоскости бумаги такъ, что одинъ конецъ  $A$  находится въ плоскости бумаги, а другой конецъ  $B$  обращенъ къ читателю; тогда силы  $P$  и  $P'$ , приложенныя въ точкѣ  $A$ , также лежатъ въ плоскости бумаги.



бумаги:

$$AC' \perp PQ$$

и по величинѣ

$$AC' = PAQ;$$

$$AD' \perp PQ$$

и по величинѣ

$$AD' = PAQ;$$

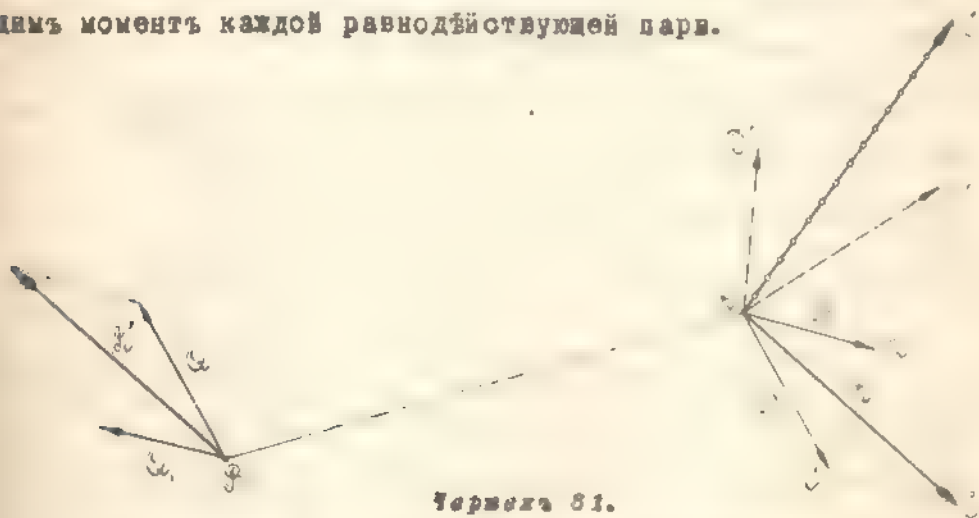
следовательно, треугольники  $AC'C'$  и  $AD'D'$  подобны, а отсюда  
следуетъ, что

$$AC' \perp AD'$$

и по величинѣ

$$AC' = AD';$$

Результатъ, полученный для двухъ паръ, распространяемъ на-  
тъмъ на случай сколькихъ угодно паръ; складываемъ пары послѣ-  
довательно по двѣ: первую пару со второй; найденную равнодѣй-  
ствующую пару съ третьей парой и т.д. и по доказанному нахо-  
димъ моментъ каждой равнодѣйствующей паръ.



Чертежъ 81.

Такимъ образомъ, сложение паръ приводится къ геометричес-  
кому сложению ихъ линейныхъ моментовъ.

Пары находятся въ равновѣсѣ, если геометрическая сумма  
ихъ линейныхъ моментовъ равна нулю; въ этомъ случаѣ въ равно-  
дѣйствующей парѣ или сила равна нулю, или плечо равно нулю.

Для того чтобы разложить данную пару на нѣсколько составляющихъ паръ, мы разлагаемъ ея линейный моментъ такъ, какъ раньше разлагали силу на ея составляющія, и затѣмъ для каждаго составляющаго момента беремъ какую либо соотвѣтствующую ему пару.

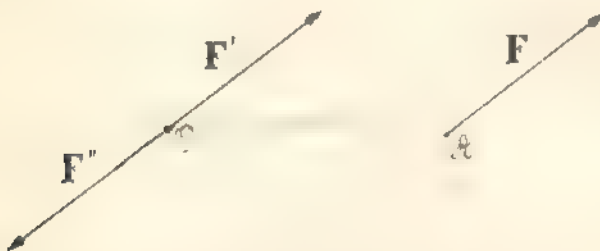
## ГЛАВА IX.

### ЛИНЕЙНЫЙ МОМЕНТЪ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ.

#### § 1. Моментъ силы относительно точки.

Принципы второй и третьей приводятъ насъ къ слѣдующему заключенію:

Сила  $F$ , приложенная къ твердому тѣлу въ точку  $A$ , можетъ быть замѣнена силою  $F'$ , равною ей по величинѣ и направленію, но приложенною въ произвольно выбранной точкѣ  $C$  тѣла, и парю силъ, изъ которыхъ одна есть данная сила  $F$ , а другая сила  $F''$ , ей равная, приложенная въ точку  $O$  (черт. 62).



Чертежъ 62.

Линейный моментъ пары  $F F''$  называется линейнымъ моментомъ силы  $F$  относительно точки  $O$ .

Точка  $O$  называется центромъ момента.

Такимъ образомъ, на основаніи предъидущаго параграфа, линейный моментъ силы  $F$  относительно точки  $C$  (черт. 63) есть векторъ  $\vec{y} = \vec{C}K$ , величина и направленіе котораго опредѣляются

слѣдующимъ образомъ: величина равна произведенію величины силы на длину перпендикуляра, опущеннаго изъ центра момента на линію дѣйствія силы:

$$g = OX - Fh - 2 \sin \angle AOB - \\ - F.r \sin (F.r).$$

**Направленіе** есть направленіе перпендикуляра, возстановленнаго къ плоскости, проходящей черезъ центръ момента и силу, въ такую сторону, чтобы наблюдатель, помѣщенный такъ, что перпендикуляръ идетъ отъ ногъ къ головѣ, видѣлъ силу направленною сама направо.

Это опредѣленіе линейнаго момента распространяется и на



тотъ случай, когда центръ момента не принадлежитъ тѣлу.

Изъ опредѣленія линейнаго момента силы относительно точки слѣдуетъ:

Чертежъ 63.

1) моментъ

этотъ не измѣняется при переносѣ точки приложенія силы въ какую либо другую точку, лежащую на линіи ея дѣйствія;

2) моменты силы относительно всѣхъ центровъ, лежащихъ на прямой, параллельной линіи дѣйствія силы, равны между собою по величинѣ и направленію;

3) моментъ силы относительно точки равенъ нулю только тогда, когда эта точка лежитъ на линіи дѣйствія силы.

**ТЕОРЕМА.** Линейный моментъ равнодѣйствующей силы относительно точки равенъ геометрической суммѣ линейныхъ моментовъ составляющихъ силу относительно той же точки.

Эта теорема слѣдуетъ изъ теоремы о линейномъ моментѣ равнодѣйствующей пары: моментъ равнодѣйствующей силы  $R$  (черт. 64) относительно точки  $O$  есть моментъ пары  $(R, R')$ , которая получается отъ сложения паръ:  $(F, F')$ ,  $(F_1, F_1')$ ,  $(F_2, F_2')$ .



Чертежъ 64.

гдѣ  $F, F_1, F_2$  составляющія силы; а линейные моменты этихъ паръ суть линейные моменты силъ  $F, F_1, F_2$  относительно точки  $O$ .

Если тѣло имѣетъ неподвижную точку, то двѣ силы, къ нему приложенныя, находятся въ равновѣсїи только тогда, когда линейные моменты ихъ относительно этой точки равны, параллельны\*) и направлены въ противоположныя стороны; — къ этому результату мы приходимъ, замѣняя каждую силу равною ей силой, приложенною къ неподвижной точкѣ и парю силъ.

## § 2. Моментъ силы относительно оси.

Если тѣло имѣетъ неподвижную ось, то сила, приложенная къ тѣлу, уравновѣшивается реакціями оси въ двухъ случаяхъ:

- 1) когда она пересѣкаетъ ось (черт. 65) — очевидно;
- 2) когда она параллельна оси (черт. 66); — для доказательства силу  $F$  замѣняемъ равною и параллельною ей силою  $F'$ .

\*) Для этого необходимо, чтобы силы находились въ одной плоскости, проходящей черезъ неподвижную точку.

приложенной въ точкѣ  $\gamma$  ( $\gamma C \perp MN$ ), и парой силъ ( $F, F''$ ); повернувши затѣмъ плечо  $\gamma C$  пары на  $90^\circ$ , мы получимъ, вмѣсто силъ  $F$ , три эквивалентныя ей силы:  $F$ ,  $A'B'-F$  и  $C'D'-F''-F$ , которыя, очевидно, уравниваются реакціями оси.



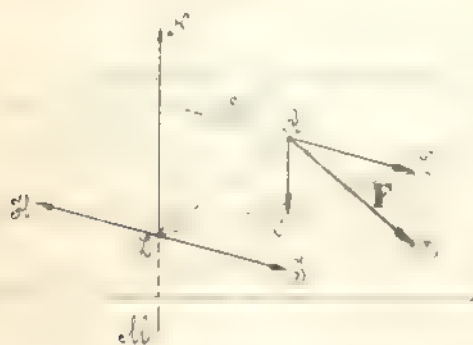
Чертежъ 65.



Чертежъ 66.

Въ обоихъ указанныхъ случаяхъ равновѣсія сила находится въ одной плоскости съ осью.

Пусть сила  $F$  (ч. 66) не лежитъ въ одной плоскости съ осью  $MN$  (черт. 67).



Чертежъ 67.

Разлагаемъ ее на двѣ составляющія:  $AC$ , параллельную  $MN$ , и  $AD$ , перпендикулярную къ  $AC$ ; сила  $AC$ , какъ уже извѣстно, уравни-

вается реакціями оси; черезъ  $AC$  проводимъ плоскость, перпендикулярную къ  $MN$ , и въ точкѣ пересѣченія  $L$  прилагаетъ двѣ взаимноуравновѣшивающіяся силы  $LQ$  и  $LQ'$ , равныя и параллельныя  $AC$ ; можемъ сказать, что сила  $F$  производитъ на тѣло такое же дѣйствіе, какъ пара силъ  $AC$  и  $LQ$ , такъ какъ сила  $LQ'$  уравнивается реакціей оси; — это обстоятельство

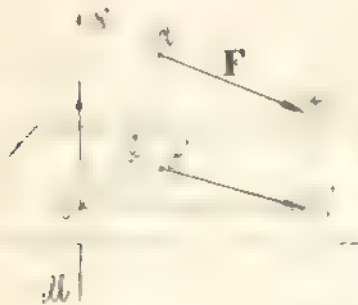


приводить насъ къ понятію о моментѣ силы относительно оси.

Оси  $МХ$  приписывается опредѣленное направленіе, напри-  
мѣръ, отъ  $М$  къ  $Х$ .

Моментомъ силы  $F$  относительно оси  $МХ$  называется линей-  
ный моментъ пары силъ  $(F, 2H)$ , величинѣ котораго припи-  
сывается знакъ плюсъ, когда онъ направленъ въ ту же сторону,  
что и ось  $МХ$ , и знакъ минусъ, когда онъ направленъ въ сто-  
рону противоположную.

По абсолютной величинѣ моментъ силы  $F$  относительно оси  
 $МХ$  равенъ удвоенной площади  $\triangle AIL$ , или произведенію  $AL \cdot LE$ ,  
гдѣ отрѣзокъ  $LE$  перпендикуляренъ къ  $AD$ ; такъ какъ линия  
 $LE$  перпендикулярна къ  $МХ$  и къ плоскости  $CAI$ , а, слѣдо-  
вательно, и къ  $AD$ , то она равна кратчайшему разстоянію меж-  
ду линіей дѣйствія силы  $F$  и осью  $МХ$ .



Чертежъ 68.

Получаемъ такимъ  
образомъ слѣдующее оп-  
редѣленіе момента си-  
лы относительно оси,  
которое распространя-  
ется и на тотъ слу-  
чай, когда ось не при-  
надлежитъ тѣлу:

Моментъ силы от-

носительно оси равенъ произведенію проекціи силы на плоскость,  
перпендикулярную къ оси (черт. 68), на кратчайшее разстояніе  
между линіей дѣйствія силы и осью\*); это произведеніе берется  
со знакомъ плюсъ, если наблюдатель, помѣщенный такъ, что ось

\*) Кратчайшее разстояніе между линіей дѣйствія силы  $AB$  и  
осью  $МХ$  равно длинѣ перпендикуляра  $CE$ , опущеннаго изъ точ-  
ки  $C$  пересѣченія оси съ плоскостью  $ABP$ , къ ней перпендикуляр-  
ною, на прямую  $ABP$ , по которой расположена  $AB$ , проекція си-  
лы  $AB$  на плоскость  $P$ .

проходить отъ ногъ къ головѣ, видѣть силу направленную слѣва направо (по часовой стрѣлкѣ), и со знакомъ минусъ въ противоположномъ случаѣ; величина произведенія откладывается на оси отъ любой точки въ ту или другую сторону, смотря по знаку; на чертежѣ 68 моментъ силы  $F$   $AB$  относительно оси  $MM$  равенъ

$$+A'B'OC = +2 \Delta A'OB'.$$

Моментъ силы относительно оси равенъ нулю только тогда, когда сила или пересѣкаетъ ось (кратчайшее разстояніе  $OC$  равно нулю) или ей параллельна (проекція  $A'B'$  равна нулю), т.е. только въ томъ случаѣ, когда сила направлена въ одной плоскости съ осью.

**ТЕОРЕМА.** Моментъ силы относительно оси равенъ проекціи на ось линейнаго момента силы относительно какой либо точки оси.

Доказательство основывается на томъ, что, какъ извѣстно изъ геометріи, когда прямая  $AB$  (черт. 69) проектируется на



Чертежъ 69.

плоскость  $P$ , то площадь  $\Delta A'OB'$  равна площади  $\Delta AOB$ , умноженной на косинусъ острого угла между плоскостями этихъ треугольниковъ; съ другой стороны, если  $g = OK$  обозначаетъ линейный моментъ силы  $F$  относительно точки  $O$ , то

$$OK = 2 \Delta AOB$$

и упомянутый выше косинусъ равенъ  $\cos \angle AOA'$ , слѣдовательно, произведеніе  $OK \cos \angle AOA' = OA'$  и будетъ равно  $2 \Delta A'OB'$ .

Изъ этой теоремы, на основаніи вышесказаннаго о моментѣ

равнодействующей силы относительно точки, слѣдуетъ:

Моментъ относительно оси равнодействующей силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, равенъ алгебраической суммѣ моментовъ этихъ силъ относительно той же оси.

### § 3. Аналитическія выраженія моментовъ силы относительно оси и относительно точки.

Возьмемъ три взаимноперпендикулярныя координатныя оси:

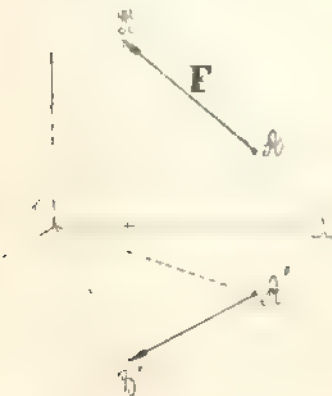
$OX, OY, OZ$ ; обозначимъ черезъ  $x, y, z$  координаты точки приложенія силы  $F$ , а черезъ  $X, Y, Z$  проекціи силы  $F$  на координатныя оси.

Примѣняя къ проекціямъ силы  $F$  на каждую изъ координатныхъ плоскоотей способъ, указанный на стр. 26 для силы, лежащей въ плоскости  $XY$ , находимъ слѣдующія выраженія для момента силы  $F$  относительно каждой изъ координатныхъ осей:

$$\left. \begin{aligned} m_{OZ}(F) &= zY - yZ \\ m_{OY}(F) &= xZ - zX \\ m_{OX}(F) &= xY - yX \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Для того, чтобы найти, напримѣръ, моментъ силы  $F$  ( $=AB$ )

относительно оси  $OZ$  (черт. 70), проектируемъ  $AB$  на плоскость  $XY$ , получаемъ  $A'B'$ ; координаты точки  $A'$  будутъ  $x, y$ , а проекціи  $A'B'$  на оси  $OX$  и  $OY$  тѣ же, что и для силы  $F$ , т.е.  $X$  и  $Y$ , поэтому



Чертежъ 70.

$$2 \text{ п.л. } \triangle A'OB' = xY - yX;$$

выраженія двухъ другихъ моментовъ получается посредствомъ круговой перестановки буквъ

$x, y, z$  и  $X, Y, Z$ .

Моменты силы  $F$  относительно осей  $(x', y', z')$ , параллельных координатным осям и проходящих через точку  $O'$ , координаты которой обозначим через  $x_0, y_0, z_0$ , будут, очевидно, выражаться следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} m_{x'}(F) &= (y - y_0)Z - (z - z_0)Y \\ m_{y'}(F) &= (z - z_0)X - (x - x_0)Z \\ m_{z'}(F) &= (x - x_0)Y - (y - y_0)X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Обозначим через  $\mathcal{G}$  линейный моментъ силы  $F$  относительно точки  $O$ , начала координатъ; на основаніи вышеуказанной связи между моментомъ силы относительно оси и линейнымъ моментомъ силы относительно точки, лежащей на оси, заключаемъ, что проекціи на координатныя оси линейнаго момента  $\mathcal{G}$  (черт. 71) выражаются по формуламъ (1):



Чертежъ 71.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G} \cos(\mathcal{G}, x) &= yZ - zY \\ \mathcal{G} \cos(\mathcal{G}, y) &= zX - xZ \\ \mathcal{G} \cos(\mathcal{G}, z) &= xY - yX \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Отсюда слѣдуютъ формулы, опредѣляющія величину и направленіе линейнаго момента силы  $F$  относительно начала координатъ:

$$\mathcal{G} = \sqrt{(yZ - zY)^2 + (zX - xZ)^2 + (xY - yX)^2};$$

$$\cos(\mathcal{G}, x) = \frac{yZ - zY}{\mathcal{G}}; \quad \cos(\mathcal{G}, y) = \frac{zX - xZ}{\mathcal{G}};$$

$$\cos(\mathfrak{L}, X) = \frac{xY - yX}{g}.$$

Проекціи на координатныя оси линейнаго момента  $\mathfrak{L}$  силы  $\mathbf{F}$  относительно точки  $C'$ , имѣющей какія угодно координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , выражаются по формуламъ (2):

$$\left. \begin{aligned} g \cos(\mathfrak{L}, X) &= (y - y_0)Z - (z - z_0)Y \\ g \cos(\mathfrak{L}, Y) &= (x - x_0)Z - (z - z_0)X \\ g \cos(\mathfrak{L}, Z) &= (x - x_0)Y - (y - y_0)X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

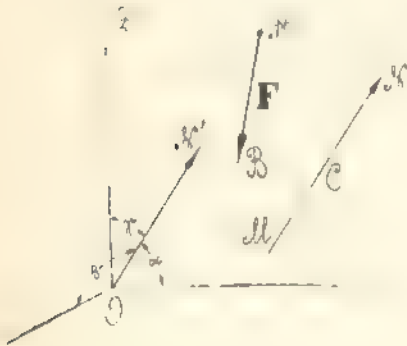
Отсюда слѣдуетъ подобныя предыдущимъ формулы для опредѣленія величины и направленія линейнаго момента  $g$ .

Составимъ выраженіе момента силы  $\mathbf{F}$  относительно какой-угодно оси  $MM'$ .

Пусть координаты какой либо изъ точекъ этой оси, точки  $C$ , будутъ:

$x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  (черт. 72), а углы, которые ось образуетъ съ координатными осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , соответственно будутъ равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Всякій векторъ, какое бы значеніе онъ не изображалъ, равенъ по величинѣ и направленію геометрической суммѣ его проекцій на три взаимно-



Чертежъ 72.

перпендикулярныя оси, — какъ это видно для случая, когда векторъ изображаетъ силу, на черт. 4. Поэтому, чтобы найти проекціи вектора на какую-либо данную ось, мы должны проекціи его на три координатныя оси умножить соответственно на косинусы угловъ, которые данная ось составляетъ съ координатными осями, и полученныя произведенія сложить.

Для момента силы  $\mathbf{F}$  относительно оси  $MM'$  мы получаемъ та-



кимъ образомъ, пользуясь формулами (4), слѣдующее выраженіе:

$$\begin{aligned} m_{\alpha, \beta, \gamma}(\mathbf{F}) = & [(i_j - i_o)Z - (x - x_o)Y] \cos \alpha + \\ & + [(x - x_o)X - (x - x_o)Z] \cos \beta + \\ & + [(x - x_o)Y - (y - y_o)X] \cos \gamma. \end{aligned}$$

## ГЛАВА X.

### СЛОЖЕНІЕ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Въ настоящей главѣ, указавъ приведеніе всякой системы силъ къ одной силѣ и парѣ силъ, мы рассмотримъ затѣмъ всѣ случаи, которые могутъ представиться, а именно:

- 1) силы находятся въ равновѣсіи;
- 2) силы приводятся къ одной парѣ;
- 3) силы приводятся къ одной силѣ;
- 4) силы приводятся къ двумъ силамъ, не лежащимъ въ одной плоскости.

#### § 1. Общій случай.

**ТЕОРЕМА.** Система силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, всегда можетъ быть замѣнена одною силою, приложенною въ произвольной выбранной точкѣ тѣла, и парю силъ.

**Доказательство.** Каждую изъ данныхъ силъ  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$  (черт. 73) замѣняемъ силою и парю, какъ указано въ началѣ гла-

-----  
 "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. Н. В. МЕЧЕРСКИЙ.

Издание Высш. Взаимопомощи Студ. СПб. Политехн. Института.

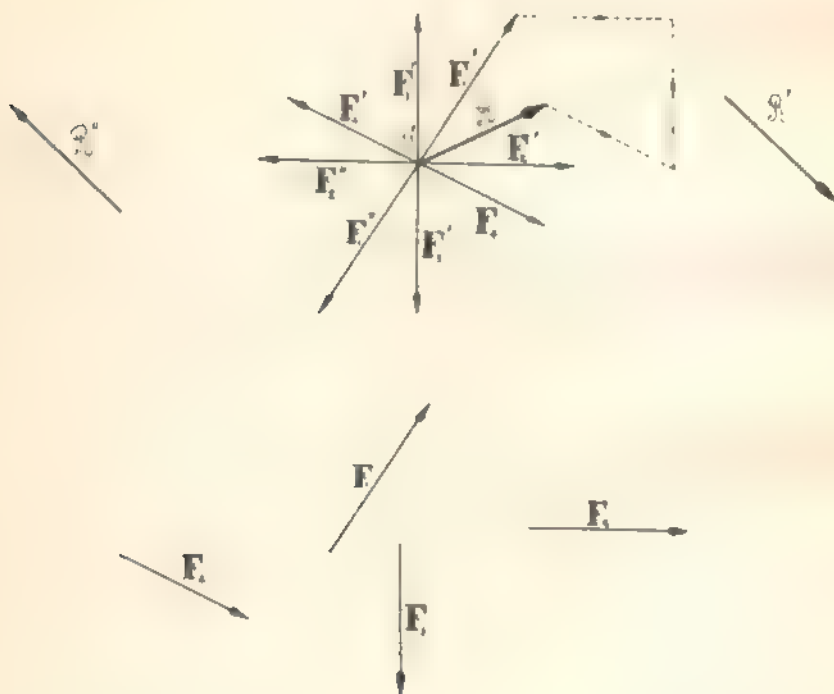
Типо-литографія Н. Трофимова. СПб. Можайская, 3.

Корректоръ А. Сабантеевъ.

Листъ 6.

ви IX; складывая пары  $(F_1, F_1'')$ ,  $(F_2, F_2'')$ ,  $(F_3, F_3'')$ ,  
 $(F_4, F_4'')$ , получаем пару  $(R, R'')$ , а складывая силы  $F_1'$ ,  
 $F_2'$ ,  $F_3'$ ,  $F_4'$ , находим силу  $R'$ ; сила  $R$  и пара  $(R', R'')$   
 эквивалентны данной системе сил.

Введем два новых термина: "главный вектор сил" и  
 "главный момент сил" относительно некоторой точки.



Чертеж 78.

Будем обозначать проекции на координатные оси силы

$F$  через  $X, Y, Z,$

$F_1$  через  $X_1, Y_1, Z_1,$

$F_2$  через  $X_2, Y_2, Z_2,$

.....

$F_n$  через  $X_n, Y_n, Z_n.$

а координаты точки приложения силы

$$\begin{aligned} F_1 & \text{ через } x_1, y_1, z_1, \\ F_2 & \text{ через } x_2, y_2, z_2, \\ F_3 & \text{ через } x_3, y_3, z_3, \\ & \dots\dots\dots \\ F_n & \text{ через } x_n, y_n, z_n. \end{aligned}$$

Геометрическая сумма данных сил называется **главным вектором** сил; обозначим этот вектор через  $V$ , а проекции его на координатные оси через  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , тогда будет:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \sum_{i=1}^n X_i \\ V_y &= \sum_{i=1}^n Y_i \\ V_z &= \sum_{i=1}^n Z_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

Геометрическая сумма линейных моментов данных сил относительно какой либо точки называется **главным моментом** сил относительно этой точки.

Главный момент сил относительно начала координат обозначим через  $L$ , а проекции его на координатные оси через  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ , тогда будет:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^n [y_i Z_i - z_i Y_i] \\ L_y &= \sum_{i=1}^n [z_i X_i - x_i Z_i] \\ L_z &= \sum_{i=1}^n [x_i Y_i - y_i X_i] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Главный момент сил относительно какой либо точки  $O'$ , имеющей координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , обозначим через  $L'$ , проекции его на координатные оси выражаются следующими формулами.

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \sum_i [(y_i - y_0)Z_i - (z_i - z_0)Y_i] \\ L_y &= \sum_i [(z_i - z_0)X_i - (x_i - x_0)Z_i] \\ L_z &= \sum_i [(x_i - x_0)Y_i - (y_i - y_0)X_i] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= L_x - y_0 V_z + z_0 V_y \\ L_y &= L_y - z_0 V_x + x_0 V_z \\ L_z &= L_z - x_0 V_y + y_0 V_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

Въ самомъ дѣлѣ изъ формулъ (3) имѣемъ:

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i (y_i Z_i - z_i Y_i) = \sum_i y_i Z_i - \sum_i z_i Y_i = \\ &= L_x - y_0 \sum_i Z_i + z_0 \sum_i Y_i = \\ &= L_x - y_0 V_z + z_0 V_y; \end{aligned}$$

также получаются двѣ другія формулы (4).

Выраженія:  $-y_0 V_z + z_0 V_y$ ,  $-z_0 V_x + x_0 V_z$ ,  $-x_0 V_y + y_0 V_x$ , на основаніи формулъ (4) главы IX можно разсматривать, какъ проекціи на координатныя оси момента главнаго вектора силъ, проведеннаго изъ начала координатъ относительно точки  $O'$ ; — обозначимъ этотъ моментъ черезъ  $L'$ ; тогда въ правыхъ частяхъ формулъ (4) мы имѣемъ проекціи геометрической суммы моментовъ  $L$  и  $L'$ .

Такимъ образомъ, формулы (4) показываютъ, что главный моментъ силъ относительно точки  $O'$  равенъ геометрической суммѣ силъхъ моментовъ главнаго момента силъ относительно начала координатъ и момента главнаго вектора, проведеннаго изъ начала

координатъ, относительно точки  $C'$ ).

Если главный векторъ силъ равенъ нулю, то главный моментъ ихъ относительно всякой точки, какъ видно изъ формулъ (4), будетъ одинъ и тотъ же: по величинѣ и направленію  $L'$  будетъ равенъ  $L$ .

Отсюда, между прочимъ, слѣдуетъ, что главный моментъ двухъ силъ, составляющихъ пару, относительно всякой точки будетъ одинъ и тотъ же: онъ равенъ по величинѣ и направленію линейному моменту пары.

Если главный векторъ силъ не равенъ нулю, то проекція главного момента силъ относительно какой угодно точки на ось, параллельную главному вектору, имѣетъ одну и ту же величину; — для доказательства нужно: какъ указано въ концѣ главы IX, умножить формулы (4) соответственно на  $\cos'$ -ы угловъ, образуемыхъ главнымъ векторомъ  $V$  съ координатными осями, т. е. на  $\frac{V_x}{V}$ ,  $\frac{V_y}{V}$ ,  $\frac{V_z}{V}$ , и затѣмъ сложить; тогда члены, содержащіе  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , попарно сократятся, и мы получимъ:

$$L' \cos(L', V) = L \cos(L, V).$$

Обратимся теперь къ вышеуказанному приведенію силъ, дѣствующихъ на твердое тѣло, къ силѣ и парѣ.

Когда данныя силы приведены къ одной силѣ  $R$ , приложенной въ точкѣ  $C'$ , и къ парѣ силъ  $(R', R'')$ , то эта сила  $R$  равна главному вектору силъ\*\*\*) и, слѣдовательно, не зависитъ отъ выбора точки  $C'$ ; проекціи ея на координатныя оси выражаются по

\*) Вообще, если проекція вектора  $W$ , имѣющая какое угодно значеніе, на каждую изъ трехъ коорд. осей равна суммѣ проекцій на ту же ось  $n$  векторовъ  $W_1, W_2, \dots, W_n$ , то векторъ  $W$  можно разсматривать какъ геометрическую сумму этихъ  $n$  векторовъ.

\*\*) Сила  $R$  есть равнодѣйствующая силъ  $F', F', F', F'$ , слѣдовательно, равна ихъ геометрической суммѣ или, что все равно, геом. суммѣ данныхъ силъ  $F, F, F, F$ .



формулам (1); линейный же момент пары  $(R', R'')$  равен главному моменту сил \*) относительно точки  $C'$  и, вообще говоря, зависит от выбора точки  $C'$ ; проекции его на координатные оси выражаются по формулам (2), если точка  $C'$  принята за начало координат; в противном случае - по формулам (3) или (4).

Две системы сил будут эквивалентны, если как главные векторы этих систем, так и главные моменты их относительно одной и той же точки равны по величине и направлению, - так как только в этом случае мы можем выбрать такую совокупность, состоящую из сил и пар, которая будет уравновешивать в отдельности и ту и другую из данных систем.

Пару  $(R', R'')$  мы всегда можем перенести так, чтобы одна из сил, например,  $R''$  была приложена в точке  $C'$ ; сложив  $R''$  с силой  $R'$ , найдем их равнодействующую  $R$ ; мы получим таким образом две силы  $R'$  и  $R$ , эквивалентные данной системе.

Заключаем: система сил, приложенных к твердому телу, может быть всегда приведена к одной силе и паре сил или к двум силам, вообще говоря, не лежащим в одной плоскости.

Таких приведений существует бесчисленное множество, потому что точку  $C'$  мы можем брать где угодно и, кроме того, можем еще заменять пару какою либо другою парой, ей эквивалентною.

## § 2. Случай, когда силы находятся в равновесии.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы силы, приложенные к твердому телу, находились в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы и

\*) Пара  $(R', R'')$  получается из сложения пар:  $(F, F')$ ,  $(F, F'')$ ,  $(F, F'')$ ,  $(F, F')$ , следовательно, линейный момент ее равен векторной сумме моментов этих пар, или, что то же самое, линейным моментом данных сил  $F, F, F, F$  относительно точки  $C'$ .

главный векторъ этихъ силъ и главный моментъ ихъ были равны нулю.

**Доказательство.** Равновѣсія не будетъ, если и главный векторъ  $V$ , и главный моментъ  $L$  не равны нулю, такъ какъ (по приведеніи силъ) пара силъ не можетъ уравниваться одною силою; равновѣсія не будетъ, очевидно, и тогда, когда  $V=0$ , а  $L \neq 0$ , или  $L=0$ , а  $V \neq 0$ ; заключаемъ, что для равновѣсія необходимо, чтобы и  $V=0$ , и  $L=0$ ; достаточность же этихъ условій очевидна.

Условіе:  $V=0$  выражается тремя уравненіями:

$$V_x=0, V_y=0, V_z=0,$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0 \\ \sum Y_i &= 0 \\ \sum Z_i &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Условіе:  $L=0$  также выражается тремя уравненіями:

$$L_x=0, L_y=0, L_z=0,$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) &= 0 \\ \sum (z_i X_i - x_i Z_i) &= 0 \\ \sum (x_i Y_i - y_i X_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Множество уравненій (6) и (7) называется *уравненіями равновѣсія*.

Введемъ изъ уравненій (6) и (7) уравненія, выражающія условія равновѣсія въ томъ частномъ случаѣ, когда силы параллельны.

дѣльны.

Проведемъ изъ начала координатъ прямую  $OX$  (черт. 74), параллельную даннымъ силамъ, и пусть  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , будутъ углы, которые  $OX$  образуетъ съ координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Обозначимъ черезъ  $P_1, P_2, \dots, P_n$  величины данныхъ силъ, взятыхъ со знакомъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, будетъ ли сила направлена въ ту же сторону, что и прямая  $OX$ , или въ сторону противоположную; тогда проекціи этихъ силъ на координатныя оси будутъ равны:

$$X_1 = P_1 \cos \alpha,$$

$$Y_1 = P_1 \cos \beta,$$

$$Z_1 = P_1 \cos \gamma,$$

$$X_2 = P_2 \cos \alpha,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Y_n = P_n \cos \beta,$$

$$Z_n = P_n \cos \gamma.$$

Подставляя эти выраженія въ уравненія: (6) и (7) находимъ, что условія, необходимыя и достаточныя для равновѣсія параллельныхъ силъ, выражаются тремя уравненіями:

$$\sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha = 0 \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n P_i \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cos \beta}{\cos \beta} = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \cos \gamma}{\cos \gamma} \dots \dots \dots (9)$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (6) дадутъ:

$$\cos \alpha \sum_{i=1}^n P_i = 0,$$

$$\cos \beta \sum_{i=1}^n P_i = 0,$$

$$\cos \gamma \sum_{i=1}^n P_i = 0 ;$$

откуда слѣдуетъ равносильное имъ уравненіе (8); уравненія (7) представляются въ видѣ:

$$\cos \gamma \sum_{i=1}^n P_i y_i - \cos \beta \sum_{i=1}^n P_i x_i = 0 ,$$

$$\cos \alpha \sum_{i=1}^n P_i x_i - \cos \gamma \sum_{i=1}^n P_i = 0 ,$$

$$\cos \beta \sum_{i=1}^n P_i x_i - \cos \alpha \sum_{i=1}^n P_i = 0 ;$$

предполагая, что ни одинъ изъ  $\cos$ -овъ:  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , не равенъ нулю, мы дѣлимъ первое уравненіе на произведеніе  $\cos \beta \cos \gamma$ , второе на  $\cos \gamma \cos \alpha$ , третье на  $\cos \alpha \cos \beta$ , и получаемъ два равносильныя имъ уравненія (9).

Въ частномъ случаѣ, когда одинъ изъ  $\cos$ -овъ равенъ нулю, напримѣръ,  $\cos \alpha = 0$ , два уравненія (9) замѣняются слѣдующими двумя уравненіями:

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i = 0 ,$$

$$\cos \gamma \sum_{i=1}^n P_i y_i - \cos \beta \sum_{i=1}^n P_i x_i = 0 ;$$

если же 2 *cosinus's* равны нулю, напримѣръ,  $\cos \alpha = 0$  и  $\cos \beta = 0$  то, вмѣсто двухъ уравненій (9), имѣемъ уравненія:

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^n P_i y_i = 0 .$$



Чертежъ 74.

Равновѣсіе параллельныхъ силъ называется *остаточнымъ*, если силы остаются въ равновѣсіи и послѣ того, какъ онѣ будутъ повернуты вокругъ ихъ точекъ приложенія на какой угодно уголъ, лишь бы при этомъ не была нарушена ихъ параллельность.

Условія, необходимыя и достаточныя для *остаточнаго равновѣсія параллельныхъ силъ*, выражаются четырьмя уравненіями:

$$\sum X_i = 0.$$

$$\sum X_i x_i = 0, \sum Y_i y_i = 0, \sum Z_i z_i = 0.$$

Послѣднія три уравненія вытекаютъ изъ уравненій (9), такъ какъ въ рассматриваемомъ случаѣ уравненія (9) должны имѣть мѣсто при всякихъ величинахъ угловъ  $\alpha, \beta, \gamma$ .

### § 3. Случай, когда силы приводятся къ парѣ.

Если главный векторъ силъ равенъ нулю, а главный моментъ ихъ нулю не равенъ, то силы приводятся къ парѣ, линейный моментъ которой равенъ главному моменту данныхъ силъ.

Условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы данныя силы приводились къ парѣ, выражаются тремя уравненіями:

$$\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0, \sum Z_i = 0.$$

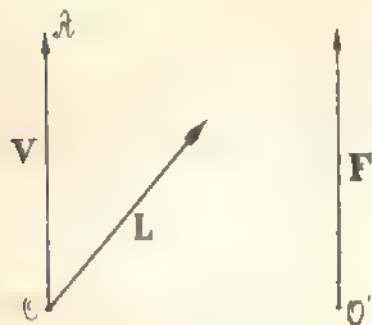
Проекціи линейнаго момента пары находятся съ помощью формулъ (2).

### § 4. Случай, когда силы приводятся къ одной равнодействующей.

**ТЕОРЕМА.** Для того, чтобы система силъ приводилась къ одной силѣ, необходимо и достаточно, чтобы главный векторъ силъ не равнялся нулю, а главный моментъ былъ или равенъ нулю, или перпендикуляренъ къ главному вектору.

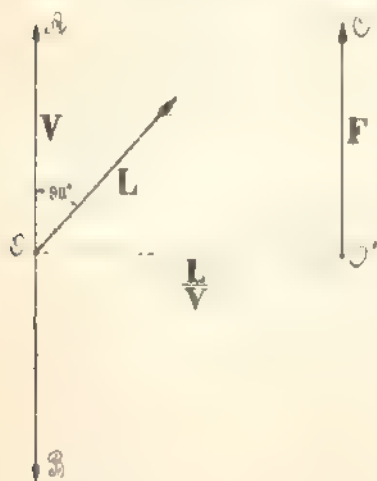


**Доказательство.** Пусть сила  $F$  (черт. 75), равная по величинѣ и направленію главному вектору  $V$ , и пара, моментъ которой равенъ главному моменту  $L$ , эквивалентна данной системѣ силъ.



Чертежъ 75.

главные векторы и главные моменты соответственно равны по величинѣ и направленію; въ настоящемъ случаѣ одна система состоитъ изъ одной силы  $F$ ; поэтому сила  $F$  должна быть равна по величинѣ и направленію главному вектору  $V$ , и моментъ ея относительно начала координатъ  $O$  долженъ быть равенъ по величинѣ и направленію главному моменту  $L$ .



Чертежъ 76.

въ теоремѣ.

1) Доказываемъ необходимость условія, заключающагося въ теоремѣ.

Допустимъ, что система силъ приводится къ одной силѣ  $F$ , приложенной въ точкѣ  $O'$ .

Выше было уже указано, что двѣ системы силъ эквивалентны

тогда и только тогда, когда ихъ

Отсюда слѣдуетъ, если точка  $O'$  совпадаетъ съ точкой  $O$ , то должно быть  $L=0$ ; если же точка  $O'$  не совпадаетъ съ точкой  $O$ , то главный моментъ  $L$  долженъ быть перпендикуляренъ къ плоскости, проходящей черезъ точку  $O$  и силу  $F$ , а такъ какъ  $F \parallel V$ , то  $L \perp V$ .

2) Доказываемъ достаточность условія, заключающагося

Если  $L=0$ , то, очевидно, сила  $F$ , равная по величинѣ и направленію главному вектору  $V$  приложенная въ началѣ координатъ, и будетъ равнодѣйствующею силой.

Пусть  $L \perp V$  (черт. 76); пару, соответствующую моменту  $L$ , возьмемъ въ такомъ видѣ, чтобы силы равнялись главному вектору  $V$  (слѣдовательно, плечо равно  $\frac{L}{V}$ ), и перенесемъ ее такъ, чтобы одна сила  $SA$  была направлена по той же прямой, что и главный векторъ  $SA$ , но въ противоположную сторону; тогда другая сила пары пойдетъ по  $OC \parallel SA$ ; удаляя взаимноуравновѣшивающіяся силы  $SA$  и  $SA$ , получаемъ одну силу  $OC$ , равную (по величинѣ и направленію) главному вектору  $V$ , которая и будетъ равнодѣйствующею для данной системы.

*Восстановіе точки ( $O'$ ) приложенія равнодѣйствующей сил.*

Изъ начала координатъ  $O$  проводимъ прямую  $OO'$ , перпендикулярную къ плоскости, заключающей главный векторъ  $V$  и главный моментъ данныхъ силъ  $L$ , въ такую сторону, чтобы наблюдатель, расположенный по прямой  $OO'$  и обращенный лицомъ къ точкѣ  $A$ , видѣлъ главный моментъ  $L$  направленнымъ слѣва направо \*); на этой прямой откладываемъ отрезокъ  $OC'$ , равный  $\frac{L}{V}$ , и получаемъ искомую точку  $O'$ .

Условіе  $L=0$  или  $L \perp V$ , предполагая, что  $V \neq 0$ , аналитически выражается равенствомъ:

$$L_x V_x + L_y V_y + L_z V_z = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, какъ извѣстно изъ Геометріи:

\*) Скорѣе, въ которую нужно провести прямую  $OO'$ , можемъ быть опредѣлена и такимъ образомъ: наблюдатель, расположенный такъ, что главный векторъ силъ  $SA$  проходитъ отъ ногъ къ голове, и ослѣдствіемъ на главный моментъ  $L$ , долженъ видѣть прямую  $OO'$  направленною слѣва направо.

$$L_x V_x + L_y V_y + L_z V_z = L V \cos(L, V),$$

а при главномъ векторѣ  $V$ , неравномъ нулю,

$$L V \cos(L, V) = 0$$

только тогда, когда или  $L = 0$  или

$$\cos(L, V) = 0,$$

т. е.

$$L \perp V.$$

Проекци равнодѣйствующей силы  $F$  будутъ:

$$F \cos(F, X) = V_x,$$

$$F \cos(F, Y) = V_y,$$

$$F \cos(F, Z) = V_z.$$

Координаты точки  $O'$ :  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , могутъ быть опредѣляемы по формуламъ:

$$x_0 = \frac{V_z L_x - V_x L_z}{V^2},$$

$$y_0 = \frac{V_x L_y - V_y L_x}{V^2},$$

$$z_0 = \frac{V_y L_z - V_z L_y}{V^2}.$$

Эти формулы получаемъ, рѣшая относительно  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  систему уравненій:

$$y_0 V_z - z_0 V_y = L_x,$$

$$z_0 V_x - x_0 V_z = L_y,$$

$$x_0 V_y - y_0 V_x = L_z.$$

$$x_0 V_x + y_0 V_y + z_0 V_z = 0.$$

Первыя три изъ этихъ уравненій выражаютъ, что моментъ силъ  $F$ , приложенной въ точкѣ  $O'$ , относительно каждой изъ координатныхъ осей равенъ главному моменту данныхъ силъ относи-

тельно той же оси; четвертое уравнение выражаетъ, что прямая  $OO'$  перпендикулярна къ направлению главнаго вектора:

$$CC'V \cos(CC', V) = x_0 V_x + y_0 V_y + z_0 V_z = 0.$$

Умножимъ третье уравненіе на  $V_y$ , второе на  $V_x$  и вычтемъ; получимъ:

$$x_0(V_y^2 + V_z^2) - y_0 V_x V_y - z_0 V_x V_z = V_y L_x - V_z L_y;$$

въ лѣвой части прибавимъ и вычтемъ  $x_0 V_x^2$ ; будемъ имѣть:

$$x_0(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) - V_x(x_0 V_x + y_0 V_y + z_0 V_z) = V_y L_x - V_z L_y;$$

пользуясь четвертымъ уравненіемъ, находимъ:

$$x_0 V^2 = V_y L_x - V_z L_y;$$

откуда и слѣдуетъ вышенаписанное выраженіе  $x_0$ ; подобнымъ же образомъ получимъ выраженія для  $y_0$  и  $z_0$ .

*Частный случай.* Параллельныя силы, приложенныя къ тѣлу, если ихъ главный векторъ не равенъ нулю ( $\sum_{i=1}^n \mathfrak{P}_i \neq 0$ ), приводится къ одной силѣ.

Для доказательства проще всего взять координатныя оси такъ, чтобы одна изъ нихъ, напримѣръ,  $OZ$ , была параллельна силамъ; тогда

$$V_x = 0, V_y = 0, L_x = 0,$$

а, слѣдовательно, условіе

$$L_x V_x + L_y V_y + L_z V_z = 0$$

удовлетворяется.

Равнодѣйствующая по величинѣ равна алгебраической суммѣ величинъ данныхъ параллельныхъ силъ ( $\sum_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$ ), параллельна имъ и направлена въ ту или другую сторону, смотря по знаку алгебраической суммы  $\sum_{i=1}^n \mathfrak{P}_i$ .

Одна изъ точекъ приложенія равнодѣйствующей параллельныхъ силъ, расположенныхъ какъ угодно въ пространствѣ, обладаетъ

тѣмъ свойствомъ, что положеніе ея не зависитъ отъ направленія силъ; — эта точка называется центромъ параллельныхъ силъ.

Для того, чтобы показать, что такая точка существуетъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣлить ея положеніе, мы складываемъ послѣдовательно, каждый разъ по двѣ, сначала силы, направленныя въ одну сторону, затѣмъ силы, направленныя въ противоположную сторону, и, наконецъ, двѣ силы, направленныя въ разныя стороны; опредѣляемъ при этомъ каждый разъ соответствующій центръ; тогда центръ двухъ послѣднихъ силъ и будетъ искомою точкою.

**Опрядленіе:** центръ параллельныхъ силъ есть та точка приложенія ихъ равнодѣйствующей, вокругъ которой равнодѣйствующая поворачивается, когда воѣ силы мы повернемъ вокругъ точекъ приложенія на одинъ и тотъ же уголъ, не нарушая ихъ параллельности.

Координаты  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  центра параллельныхъ силъ опредѣляются по формуламъ:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^0 x_i}{\sum_{i=1}^n y_i^0};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^0 y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^0};$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^0 z_i}{\sum_{i=1}^n y_i^0};$$

гдѣ  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  координаты точки приложенія силы  $y_i^0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Для вывода этихъ формулъ выражаемъ, что моменты равнодѣйствующей, приложенной въ точкѣ  $C$ , равенъ суммѣ моментовъ данныхъ силъ сначала относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , въ предположеніи, что силы повернуты такъ, что онѣ параллельны оси  $Oz$ , а затѣмъ относительно оси  $Ox$  въ предположеніи, что силы повернуты такъ, что онѣ параллельны оси  $Oy$ .



Въ первомъ случаѣ проекціи данныхъ силъ и ихъ равнодѣйствующей на оси  $Ox$  и  $Oy$  равны нулю, а проекціи данныхъ силъ на ось  $Oz$  будутъ:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

и проекція равнодѣйствующей  $\sum_{i=1}^n P_i$ ; поэтому моменты относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  дадутъ:

$$y_c \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P_i y_i;$$

$$x_c \sum_{i=1}^n P_i = - \sum_{i=1}^n P_i x_i;$$

во второмъ случаѣ проекціи данныхъ силъ и ихъ равнодѣйствующей на оси  $Ox$  и  $Oz$  равны нулю, а на ось  $Oy$  проекція данныхъ силъ

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

и проекція равнодѣйствующей

$$\sum_{i=1}^n P_i;$$

поэтому моменты относительно оси  $Ox$  дадутъ:

$$x_c \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n P_i x_i;$$

Такимъ образомъ для приведенія параллельныхъ силъ къ одной силѣ нѣтъ надобности находить точку  $C$ , координаты которой  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z_c$  выражены выше; гораздо проще опредѣлить центръ параллельныхъ силъ  $C (x_c, y_c, z_c)$ ; сила, приложенная въ этой точкѣ, параллельная даннымъ силамъ и по величинѣ равная алгебраической суммѣ ихъ величинъ, и будетъ искомою равнодѣйствующей.

§ 5. Случай, когда силы приводятся къ силѣ и парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ силѣ.

**ТЕОРЕМА.** Если главный векторъ силъ  $V$  не равенъ нулю, а главный моментъ  $L$  не равенъ нулю и не перпендикуляренъ главному вектору, то система силъ можетъ быть приведена къ силѣ и парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ силѣ.

**Доказательство.** Пусть данная сила эквивалентна силѣ  $OA$  (черт. 77), приложенной въ началѣ координатъ и равной главному вектору  $V$ , и парѣ силъ, моментъ которой есть главный моментъ  $L$ ; эту пару разлагаемъ на двѣ пары такъ, чтобы линейный моментъ одной пары  $L_1$ , былъ параллеленъ главному вектору, а линейный моментъ другой  $L_2$ , былъ перпендикуляренъ къ главному вектору; тогда будемъ имѣть:

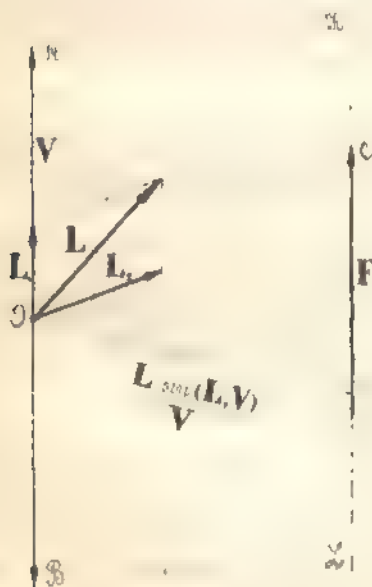
$$L = L \cos(L, V),$$

$$L_2 = L \sin(L, V).$$

Вторую пару преобразуемъ такъ, чтобы сила ея были равны главному вектору, тогда плечо ея будетъ равно

$$\frac{L \sin(L, V)}{V}$$

затѣмъ помѣстимъ эту пару такъ, чтобы одна изъ силъ,  $OB$ , была приложена въ точкѣ  $O$  по той же прямой, что и сила  $OA$ ,



Чертежъ 77.

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. К. В. ИВАНОВСКИЙ.

Издание Кабинета Взаимопомощи Студ. СБВ. Мюнхенск. Института.

Типо-литографія М. Трефилова. СБВ. Мюнхенск., 3.

Корректоръ А. Сабановъ.

Листъ 7.

но въ противоположную сторону; тогда вторая сила

$$F-O'C-V$$

будетъ приложена въ точкѣ  $C'$ , причѣмъ прямая  $OO'$ , какъ плечо пары, равна

$$\frac{L_{\text{свѣтл}}(L, V)}{V}$$

и перпендикулярна къ  $OC$  и  $L$ , а, слѣдовательно, къ плоскости, проведенной въ точкѣ  $C$  черезъ главный векторъ  $V$  и главный моментъ  $L$ .

Удаляя силы  $OA$  и  $OB$ , какъ взаимно уравновѣшивающіяся, мы получимъ силу

$$F-O'C-V$$

и пару, момента которой есть  $L$ , но  $L \parallel F$ , слѣдовательно, плоскость этой пары перпендикулярна къ силѣ  $F$ .

Такимъ образомъ, система силъ приведена къ силѣ и къ парѣ, плоскость которой перпендикулярна къ силѣ; — этотъ видъ системы называется каноническимъ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ слѣдующій способъ для приведенія системы силъ къ каноническому виду: находимъ главный векторъ  $V$  и главный моментъ  $L$  данныхъ силъ относительно какой либо точки  $C$  (обыкновенно относительно начала координатъ); ватѣмъ изъ точки  $C$  къ плоскости, проведенной черезъ главный векторъ и главный моментъ, возстановляемъ перпендикуляръ въ такую сторону, какъ указано въ § 4, т.е., чтобы наблюдатель, расположенный по этому перпендикуляру такъ, что онъ проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видѣлъ главный моментъ направленнымъ слѣва направо; на проведенномъ такимъ образомъ перпендикулярѣ откладываемъ длину  $OO'$ , равную

$$\frac{L_{\text{свѣтл}}(L, V)}{V};$$

тогда сила  $F$ , равная и параллельная главному вектору, и пара,

плоскость которой перпендикулярна къ  $F$ , а моментъ  $L_1$  равенъ

$$L \cos(L, V),$$

будутъ эквивалентны данной системѣ.

Прямая  $XL$ , проведенная черезъ точку  $O'$  параллельно главному вектору, называется *центральной осью системы*; каждая изъ точекъ центральной оси можетъ быть взята за точку приложенія силы  $F$ .

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что когда система силъ приведена къ каноническому виду, то моментъ пары ( $L_1$ ) есть наименьшій главный моментъ системы.

Докажемъ, что для всякой точки  $D$ , не лежащей на центральной оси, главный моментъ  $L$  системы будетъ больше  $L_1$ .

Выше уже видѣли, что проекція главного момента на направление главного вектора не зависитъ отъ выбора центра момента, поэтому проекціи моментовъ  $L$  и  $L_1$  на направление главного вектора  $V$  равны между собою; слѣдовательно,

$$L \cos(L, V) = L_1;$$

но  $\cos(L, V)$  — правильная дробь, а потому

$$L > L_1$$

## ГЛАВА XI.

### ЦЕНТРЪ ТЯЖЕСТИ.

#### § 1.

*Общій способъ для опредѣленія положенія центра тяжести.*

Всѣ тѣла, находящіяся на землѣ или вообще вблизи ея поверхности, подвергнуты дѣйствію силы тяжести.

Вслѣдствіе малости размѣровъ разсматриваемыхъ тѣлъ сравнительно съ размѣрами земли, силы тяжести, приложенныя къ различнымъ частямъ тѣла, считаемъ *параллельными*, именно, направленными по вертикали внизъ.

Равнодѣйствующая сила тяжести, приложенныхъ ко всемъ частямъ тѣла, называется *вѣсомъ тѣла*, а центръ этихъ силъ — *центромъ тяжести тѣла*.

Опребленіе. *Центръ тяжести тѣла есть такая точка, которая остается одною изъ точекъ приложенія вѣса тѣла при всякомъ положеніи тѣла.*

Общій способъ для нахожденія положенія центра тяжести даннаго тѣла состоитъ въ слѣдующемъ: тѣло дѣлимъ на части, центры тяжести которыхъ, а также вѣса, считаемъ извѣстными, и примѣняемъ формулы, выведенныя выше для координатъ центра параллельныхъ силъ.

Пусть будутъ:  $x_1, y_1, z_1; p_1, x_2, y_2, z_2; \dots, x_n, y_n, z_n, p_n$  координаты центровъ тяжести частей тѣла и  $p_1, p_2, \dots, p_n$  соответствующіе вѣса;  $x, y, z$  координаты центра тяжести (G) тѣла; тогда

$$\left. \begin{array}{l} \sum p x \\ \sum p y \\ \sum p z \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ  $\sum p$  есть вѣсъ тѣла.

Изъ формулъ (1) слѣдуетъ:

1) при опредѣленіи центра тяжести тѣла вѣса частей можно замѣнить какими либо пропорціональными имъ величинами.



2) если центры тяжести *всѣхъ* частей тѣла лежать въ одной плоскости, то и центр тяжести тѣла лежитъ въ этой плоскости;

3) если центры тяжести *всѣхъ* частей тѣла лежать на одной прямой, то и центр тяжести тѣла лежитъ на этой прямой;

4) если центры тяжести *всѣхъ* частей тѣла лежать въ одной точкѣ, то эта точка и будетъ центромъ тяжести тѣла.

Тѣло называется *плотъ однородной плотности*, если *вѣса* двухъ какихъ угодно частей его относятся *между собою*, какъ объемы этихъ частей; въ противномъ случаѣ тѣло называется *плотъ неоднородной плотности*.

Когда мы имѣемъ тѣло "однородной плотности", то плотность его называется отношеніе *вѣса* какой либо части тѣла къ ея объему; если же тѣло "неоднородной плотности", то плотность его въ какой либо точкѣ  $\lambda$  опредѣляется слѣдующимъ образомъ: беремъ часть тѣла, заключающую въ себѣ точку  $\lambda$ , и находимъ отношеніе *вѣса* этой части къ ея объему; затѣмъ идемъ предѣлъ, къ которому это отношеніе стремится по мѣрѣ того, какъ мы будемъ уменьшать объемъ взятой нами части, приближая его къ нулю; полученный такимъ образомъ предѣлъ и называется *плотностью тѣла въ точкѣ  $\lambda$* .

Когда тѣло неоднородной плотности, плотность его въ различныхъ точкахъ, вообще говоря, будетъ различна; если же тѣло однородной плотности, то плотность его во *всѣхъ* точкахъ одна и та же.

Опредѣленіе центра тяжести упрощается въ тѣхъ случаяхъ, когда тѣло *симметрично относительно плоскости, прямой или точки*; въ первомъ случаѣ центр тяжести тѣла лежитъ въ плоскости симметріи, во второмъ на оси симметріи, въ третьемъ онъ совпадаетъ съ центромъ симметріи.

*Доказательство.* Тѣло имѣетъ *плотность симметріи* <sup>тогда</sup> тогда, когда каждой точкѣ  $\lambda$  тѣла соответствуетъ по другую сторону

плоскости  $P$  другая точка тѣла  $B$  съ такою же плотностью, какъ и точка  $A$ , причемъ разстоянія этихъ точекъ отъ плоскости  $P$  равны между собою.

Раздѣлимъ тѣло на бесконечно малыя части такъ, чтобы бесконечно-малые объемы, окружающіе соответствующія точки  $A$  и  $B$  были равны, тогда и вѣса ихъ можемъ считать равными, такъ какъ и въ случаѣ тѣла неоднородной плотности равенство между этими вѣсами можетъ быть только бесконечно-малая величина второго порядка; поэтому центръ тяжести каждаго изъ такихъ частей лежитъ въ плоскости  $P$ , а слѣдовательно, и центръ тяжести тѣла лежитъ въ этой плоскости.

Подобное же доказательство примѣняется, какъ въ случаѣ оси симметріи, такъ и въ случаѣ центра симметріи.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ разсматривать только тѣла однородной плотности.

Во многихъ случаяхъ мы не можемъ раздѣлить данное тѣло на такія конечныя части, центры тяжести которыхъ извѣстны; тогда мы дѣлимъ тѣло на части бесконечно-малыя.

Обозначимъ черезъ  $\Delta V$  ("дельта  $V$ ") бесконечно-малый объемъ какой либо части, а черезъ  $x, y, z$  координаты центра тяжести этого объема или одной изъ его точекъ; тогда изъ формулъ (1), по сокращеніи на плотность, получаемъ слѣдующія формулы для опредѣленія центра тяжести:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x \Delta V}{Q}, \\ y_c &= \frac{\sum y \Delta V}{Q}, \\ z_c &= \frac{\sum z \Delta V}{Q}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ  $Q$  обозначаетъ объемъ тѣла, а "Пред." обозначаютъ тѣ предѣлы, къ которымъ указанная сумма приближается при уменьшеніи

объемов  $\Delta V$  до нуля.

При рѣшеніи многихъ вопросовъ приходится опредѣлять не только центръ тяжести объемовъ, но также центръ тяжести *линій, площадей и поверхностей*.

Тѣло, двумя размерами котораго пренебрегаемъ, (примѣръ - тонкая проволока), мы рассматриваемъ, какъ *линію*.

Плотность однородной линіи (линейная плотность) опредѣляется, какъ отношеніе вѣса какой либо части линіи къ длинѣ этой части.

Формулы (1) примѣнимы и въ случаѣ линіи. Когда линію раздѣлимъ на *безконечно-малыя* части  $\Delta s$ , формулы (1), по сокращеніи на плотность, дадутъ слѣдующія выраженія для координатъ центра тяжести однородной линіи:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x \Delta s}{L} \\ y_c &= \frac{\sum y \Delta s}{L} \\ z_c &= \frac{\sum z \Delta s}{L} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Гдѣ  $x, y, z$  обозначаютъ координаты центра тяжести части  $\Delta s$  (или координаты одной изъ точекъ этой части), а  $L$  -длину линіи.

Если линія *плоская*, то, принимая плоскость, въ которой она лежитъ, за плоскость  $CC'$ , опредѣляемъ центръ тяжести съ помощью двухъ первыхъ формулъ (3).

Тѣло, однимъ размеромъ котораго пренебрегаемъ (примѣръ - тонкая пластинка), мы рассматриваемъ, какъ *площадь* или *поверхность*.

Плотность однородной площади или поверхности (поверхностная плотность) опредѣляется, какъ отношеніе вѣса какой либо части площади или поверхности къ величинѣ площади этой части

Формулы (1) применимы и в случае площади или поверхности.

Когда площадь или поверхность делим на бесконечно-малыя части  $\Delta\sigma$ , формулы (1), по сокращении на плотность, дают следующие выражения для координат центра тяжести площади или поверхности:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum x \Delta\sigma}{S}, \\ y_c &= \frac{\sum y \Delta\sigma}{S}, \\ z_c &= \frac{\sum z \Delta\sigma}{S} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

где  $x, y, z$  обозначают координаты центра тяжести части  $\Delta\sigma$  (или одной из точек этой части), а  $S$  - величину площади или поверхности.

В случае площади, принимая ее плоскость за плоскость  $XOY$ , определим центр тяжести с помощью двух первых из формул (4).

Сказанное выше о случаях симметрии применимо к центру тяжести как линий, так и площадей и поверхностей.

## § 2. Элементарное определение положения центра тяжести в случае однородной плотности.

### 1) Линии.

Центр тяжести прямой находится в ее середине (центр симметрии).

Центр тяжести многоугольного контура находится по формулам (1).

Примеръ. Центр тяжести  $M$  части контура правильного многоугольника находится на прямой, соединяющей центр  $O$  вписанного круга (черт. 78) с серединой данной части многоугольника, причем расстояние  $OM$  равно радиусу вписанного круга, умно-

женному на замыкающую и деленному на периметр данной части многоугольника.

Пусть:  $n$  число сторон данной части многоугольника;  $l_1 = l_2 = \dots = l_n = l$  длина сторон;  $L = \sum l$  периметр;  $R = \frac{L}{2\pi}$  замыкающая и  $R = \frac{L}{2\pi}$  радиус вписанного круга; тогда

$$Og = \frac{R \cdot H}{L}.$$

**Доказательство.**

Возьмем начало координат в центр  $O$  вписанного круга и ось  $OX$  расположим по оси симметрии; обозначим абсциссы середин сторон  $AB, BC, \dots$  через  $x_1, x_2, \dots$ ; тогда

$$Og = x_1 \frac{\sum l_1 x_1}{\sum l_1}.$$



Чертежъ 78.

Прямоугольный треугольникъ

$BK\Gamma$ , катеты котораго параллельны осямъ  $OC$  и  $CU$ , подобенъ треугольнику  $OMH$ ; следовательно:

$$\frac{BK}{OM} = \frac{K\Gamma}{MH} = \frac{BC}{MH}.$$

откуда

$$BK \cdot MH = BK \cdot OM;$$

поэтому, обозначая через  $d_1, d_2, \dots$  длины проекцій сторонъ  $AB, BC, \dots$  на ось  $OY$ , имеемъ:

$$x_1 = R d_1;$$

следовательно:

$$Og = \frac{\sum l_1 x_1}{L} = \frac{R \sum d_1}{L};$$

но



$$\sum x_i = H,$$

значить

$$CG = \frac{RH}{L}.$$

Центръ тяжести кривой опредѣляемъ приближенно, замѣняя ее многоугольникомъ, стороны котораго представляютъ касательныя кривой или ея хорды.

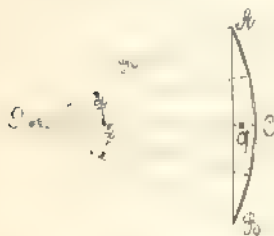
Если удастся перейти къ предѣлу, то центръ тяжести кривой будетъ опредѣленъ точно.

Примръ: центръ тяжести дуги круга находится на прямой, соединяющей центръ круга съ серединою дуги, причемъ расстояние центра тяжести отъ центра круга равно радиусу, умноженному на хорду и дѣленному на дугу:

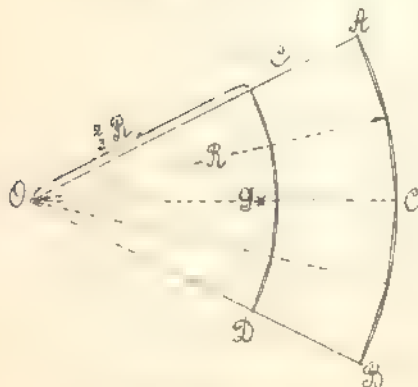
$$CG = \frac{R \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha},$$

гдѣ  $\alpha$  выраженъ въ частяхъ радиуса (черт. 79).

## 2) Площади и поверхности.



Чертежъ 79.



Чертежъ 80.

Центръ тяжести площади треугольника находится на прямой, соединяющей вершину съ серединою основанія, такъ какъ эта прямая есть ось симметріи треугольника; расстояние центра тяжести по этой прямой отъ основанія равно одной трети ея.

Центръ тяжести площади многоугольника или части поверхности многоугольника можемъ всегда найти, раздѣляя на треугольники и принявъ формулы (1).

Примръ. Центръ тяжести

площади кругового сектора  $AOB$  (черт.80) совпадаетъ съ центромъ тяжести дуги круга  $AB$ , описанной изъ центра  $O$  радиусомъ, равнымъ двумъ третямъ радиуса  $R$  сектора, и заключенной между крайними радиусами сектора.

**Доказательство.** Дѣлимъ секторъ на равные треугольники; центръ тяжести каждого изъ нихъ лежитъ въ срединѣ соответствующей хорды окружности, описанной радиусомъ  $r = \frac{2}{3} R$ ; приложенные въ этихъ центрахъ тяжести вѣсы равны между собою, слѣдовательно, ихъ центръ совпадаетъ съ центромъ тяжести периметра многоугольника  $ACB$ ; при увеличеніи числа треугольниковъ въ предѣлѣ многоугольникъ  $ACB$  совпадаетъ съ дугой  $AB$  и его центръ тяжести съ центромъ тяжести дуги  $AB$ .

Центръ тяжести кривой поверхности опредѣляется приближенно, если замѣнить ее поверхностью многоугольника, грани котораго или имѣютъ вершины на данной поверхности или касаются ея; если удастся перейти къ предѣлу, то центръ тяжести кривой поверхности будетъ опредѣленъ точно.

**Примѣръ.**

Центръ тяжести поверхности шарового сегмента (не считая основанія) находится на срединѣ его высоты.

Для доказательства дѣлимъ поверхность сегмента на пояса равной высоты; — поверхности такихъ поясовъ равны между собою; ихъ центры тяжести лежатъ на прямой, представляющей высоту сегмента, причемъ равнымъ отрѣзкамъ этой прямой соответствуютъ и равные вѣсы; въ предѣлѣ получимъ то же, что мы имѣемъ въ случаѣ отрѣзка прямой однородной плотности, и слѣдовательно, центръ тяжести поверхности сегмента будетъ въ срединѣ его высоты.

**3) Объемы.**

Центръ тяжести  $G$  тетраэдра (черт.81) находится на прямой, соединяющей вершину тетраэдра съ центромъ тяжести осно-

ванія, приче́мъ разсто́яніе центра тяжести  $G$  во́ этой прямой отъ основанія равно одной четверти ея.

Пусть  $F$  центръ тяжести  $\triangle ABC$  ; если мы раздѣлимъ тетрае́дръ на бесконе́чно тонкіе слои плоскостями, паралле́льными  $ABC$ , тогда центры тяжести всѣхъ этихъ слое́въ будутъ лежать на прямой  $DF$ , слѣдовательно, и центръ тяжести тетрае́дра  $G$  тоже лежитъ на прямой  $DF$ .

Если  $H$  центръ тяжести  $\triangle BCD$ , то центръ тяжести тетрае́дра  $G$  долженъ лежать и на прямой  $AH$  ; слѣдовательно, центръ тяжести  $G$  находится на пересѣченіи прямыхъ  $DF$  и  $AH$ .

Изъ подобія треугольниковъ  $ADG$  и  $FEG$  находимъ:

$$FG = \frac{1}{3} FD;$$

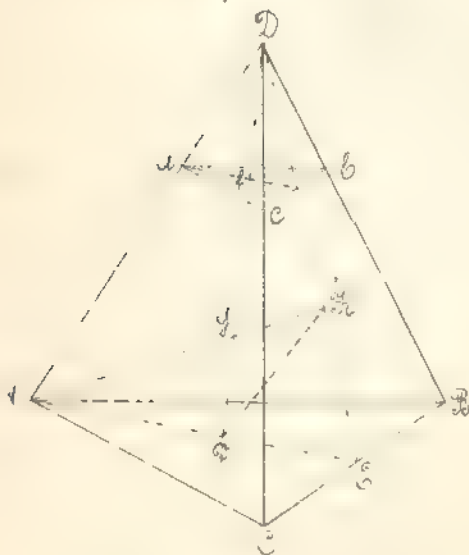
а тогда изъ подобія  $ADG$  и  $FGE$  получаемъ:

$$DG = \frac{1}{3} GD,$$

слѣдовательно

$$DG = \frac{1}{4} DF$$

Центръ тяжести пирамиды совпадаетъ съ центромъ тяжести площади, полученной отъ пересѣченія пирамиды плоско-  
стью, паралле́льной основанію, на разсто́яніи отъ него . рав-  
номъ одной четверти высоты; къ этому заключенію мы при-  
ходимъ, раздѣляя пирамиду на тетраедры.



Чертежъ 81.

Центръ тяжести круглаго конуса находится на прямой, соединяющей вершину съ центромъ основанія на разсто́яніи, равномъ одной четверти

высоты; — это слѣдуетъ изъ того, что конусъ можно разсматривать какъ предѣльный случай пирамиды.

Центръ тяжести объема многогранника находимъ, раздѣляя его на тетраэдры и примѣняя формулы (1).

Центръ тяжести объема, ограниченного кривою поверхностью, находимъ приближенно, замѣняя кривую поверхность поверхностью многогранника, грани котораго имѣютъ вершины на данной поверхности или касаются ей; если удастся перейти къ предѣлу, центр тяжести данного объема будетъ определенъ точно.

Примръ: центр тяжести объема шарового сектора совпадаетъ съ центромъ тяжести поверхности шарового сегмента, описаннаго изъ того же центра радиусомъ, равнымъ тремъ четвертямъ радиуса сектора, и заключающагося внутри сектора.

Опытное опредѣленіе положенія центра тяжести производится посредствомъ подвѣщиванія на нити, посредствомъ уравновѣшиванія на остріѣ ножа и другими способами.

## ГЛАВА XII.

### РАВНОВѢСІЕ НЕСВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА.

Рѣшеніе вопроса о равновѣсіи несвободнаго твердаго тѣла основывается на принципі лѣтѣ; пользуясь этимъ принципомъ, мы можемъ примѣнить въ случаѣ несвободнаго тѣла введенныя выше уравненія, выражающія условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ свободному тѣлу.

Задача о равновѣсіи несвободнаго тѣла распадается на двѣ: первая задача: найти необходимыя и достаточныя условія, которыми должны удовлетворять задаваемые силы для того, чтобы рав-

новіше существовало; вторая: определить величины и направления реакций опоръ.

Если определена реакція какой либо опоры, то определено и давленіе тѣла на эту опору, такъ какъ давленіе равно по величинѣ и противоположно по направленію реакціи.

Первая задача можетъ быть рѣшена съ помощью статики - во всякихъ случаяхъ; вторая только тогда, когда существующія опоры не препятствуютъ тѣмъ измѣненіямъ тѣла, которыя происходятъ вслѣдствіе физическихъ причинъ, напримѣръ, нагрѣванія, охлажденія и такъ далѣе.

Вудемъ обозначать, какъ въ § 1 гл. IX, черезъ  $V$  главный векторъ задаваемыхъ силъ, черезъ  $L$  ихъ главный моментъ относительно начала координатъ, чрезъ  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  проекціи момента  $L$  на координатныя оси, или главные моменты относительно координатныхъ осей; рассмотримъ случаи, указанные въ слѣдующихъ параграфахъ.

### § 1. Тѣло имѣетъ неподвижную точку.

Изъ вѣстныхъ свойствъ реакціи неподвижной точки слѣдуетъ:

а) для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемые силы имѣли равнодѣйствующую, линія дѣйствія которой проходитъ черезъ неподвижную точку  $C$  (черт. 82);

б) реакція  $R$  равна по величинѣ и противоположна по направленію равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ.

Проекціи реакціи на координатныя оси обозначимъ черезъ  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ; неподвижную точку примемъ за начало координатъ; тогда уравненія равновѣсія будутъ:



Чертежъ 82.

$$V_x + X' = 0; V_y + Y' = 0; V_z + Z' = 0; \quad (1)$$

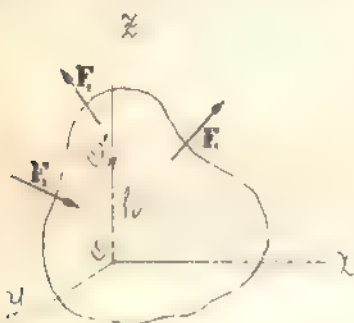


$$2) \quad L_x=0 ; L_y=0 ; L_z=0 \dots\dots\dots (2)$$

Изъ уравненій (2) слѣдуетъ условіе (а), а тогда изъ уравненій (1) - заключеніе (b).

§ 2. Тѣло имѣетъ две неподвижныя точки.

Одну изъ двухъ неподвижныхъ точекъ  $O$  и  $O'$  (черт. 83), именно точку  $O$ , примемъ за начало координатъ, и ось  $OZ$  направимъ по прямой  $OO'$ ; пусть разстояние  $OO'=h$ ; реакція въ точкѣ  $O$  пусть будетъ  $R' (X', Y', Z')$ , реакція въ точкѣ  $O'$  будетъ  $R'' (X'', Y'', Z'')$ ; тогда уравненія равновѣсія напишемъ въ видѣ:



Чертежъ 83.

$$\left. \begin{aligned} V_x + X' + X'' &= 0 ; L_x - h Y'' = 0 ; \\ V_y + Y' + Y'' &= 0 ; L_y + h X'' = 0 ; \\ V_z + Z' + Z'' &= 0 ; L_z = 0 . \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Послѣднее изъ уравненій (3) выражаетъ необходимое и достаточное условіе равновѣсія; остальные пять уравненій служатъ для опредѣленія реакцій; при этомъ проекціи реакцій на ось  $OO'$  вполне не опредѣляются, такъ какъ извѣстно только, что  $Z' + Z'' = -V_z$ , это можно было предвидѣть, такъ какъ закрѣпленіе двухъ точекъ не позволяетъ имъ удалиться другъ отъ друга при нагреваніи тѣла.

§ 3. Тѣло опирается нѣсколькими точками на гладкую плоскость.

Слѣдствія, которыя легко выводятся изъ извѣстныхъ свойствъ реакцій гладкой плоскости въ точкахъ прикосновенія къ ней твердаго тѣла

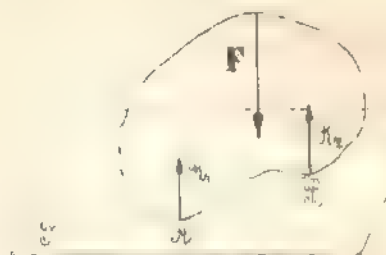
1) Одна точка прикосновения  $A$  (черт.84).

а) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемые силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости  $\omega$  по перпендикуляру къ ней въ точкѣ  $A$ ;

б) Реакція равна по величинѣ и противоположна по направленію равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ.



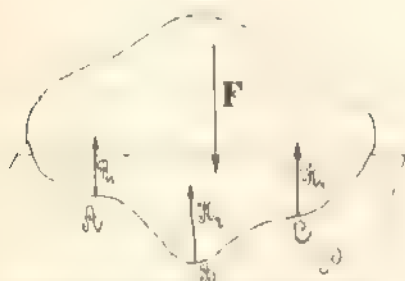
Чертежъ 84.



Чертежъ 85.

2) Двѣ точки прикосновения ( $A$  и  $B$ ) (черт.85).

а) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемые силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости  $\omega$  по перпендикуляру къ ней въ точкѣ, лежащей на прямой  $AB$  между точками  $A$  и  $B$ .



Чертежъ 86.

б) Реакціи  $R_1$  и  $R_2$

будутъ опредѣлены, когда равнодѣйствующую данныхъ силъ разложимъ на двѣ параллельныя ей составляющія, приложенныя въ точкахъ  $A$  и  $B$ .

3) Три точки прикосновения ( $A, B, C$ ) (черт.86).

Могутъ представиться два случая.

1) точки  $A, B, C$  образуютъ треугольникъ;

2) точки  $A, B, C$  лежатъ на одной прямой.

а) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемые силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости  $\sigma$  по перпендикуляру къ ней въ точкѣ, лежащей внутри треугольника  $ABC$ , - въ первомъ случаѣ, - и на отрѣзкѣ прямой  $AC$  между крайними его точками, - во второмъ случаѣ.

б) Въ первомъ случаѣ реакціи  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  будутъ определены, когда равнодѣйствующую данныхъ силъ разложимъ на три параллельныя ей составляющія, приложенныя въ точкахъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; во второмъ случаѣ реакціи останутся неопределенными.

4) Четыре и болѣе точекъ прикосновенія.

а) Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы задаваемые силы имѣли равнодѣйствующую, которая была бы направлена къ плоскости  $\sigma$  по перпендикуляру къ ней въ точкѣ, лежащей внутри контура, проведеннаго черезъ крайнія точки прикосновенія.

б) Реакціи останутся неопределенными.

Напишемъ уравненія равновѣсія для рассматриваемаго случая (4).

Данную плоскость  $\sigma$  примемъ за плоскость  $XYZ$  и ось  $OZ$  направимъ въ ту сторону, гдѣ находится тѣло. Пусть существуетъ  $k$  точекъ прикосновенія, координаты ихъ  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , .....  $(x_k, y_k)$  и соотвѣтствующія реакціи

$$R_1, R_2, R_3, \dots, R_k.$$

Уравненія равновѣсія будутъ:

$$\left. \begin{aligned}
 V_x &= 0 ; \\
 V_y &= 0 ; \\
 V_z + x_1 \ddot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_2 + \dots + x_n \ddot{x}_n &= 0 ; \\
 L_{x_1} + x_1 \ddot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_2 + \dots + x_n \ddot{x}_n &= 0 ; \\
 L_{x_2} + x_1 \ddot{x}_1 + x_2 \ddot{x}_2 + \dots + x_n \ddot{x}_n &= 0 ; \\
 L_z &= 0 ;
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Два первые и последнее изъ уравненій (4) показываютъ, что задаваемые силы должны имѣть равнодѣйствующую, перпендикулярную къ данной плоскости.

Съ помощью остальныхъ трехъ уравненій мы можемъ опредѣлить реакціи (а слѣдовательно, и давленія тѣла на плоскость) только тогда, когда число ихъ не болѣе трехъ.

К Е Н Е М А Т И К А .

( О с н о в н и я п о н я т і я ).





## К И Н Е М А Т И К А

### ( О с н о в н ы я п о н я т и я ).

Кинематика рассматривает движение независимо отъ тѣхъ причинъ, которыми оно обусловливается.

Этотъ отдѣлъ Механики основывается только на тѣхъ принципахъ, которые лежатъ въ основаніи Геометріи.

О движеніи тѣла мы судимъ по измѣненію разстояній его точекъ отъ точекъ какого либо другого тѣла; смотря по тому, находится ли это второе тѣло въ покоѣ или въ движеніи, движение перваго тѣла называется *абсолютнымъ* или *относительнымъ*.

Мы будемъ изучать сначала *абсолютное движение*.

#### § 1. Аналитическое и графическое выраженія движенія точки.

Абсолютное движеніе точки есть непрерывный переходъ ея черезъ точки пространства.

Движущаяся точка вычерчиваетъ въ пространствѣ непрерывную линію, которая называется *траекторіей* точки; -траекторія точки есть геометрическое мѣсто положеній движущейся точки.

Движеніе точки называется *прямолинейнымъ*, если траекторія ея - прямая линія, и *криволинейнымъ*, если траекторія - кривая линія; эта кривая можетъ быть какъ плоскою (напримѣръ, парабола), такъ и неплоскою или "кривою двойкой кривизны" (напримѣръ, винтовая линія).

Движеніе точки считается *известнымъ* тогда, когда для каждаго момента времени можетъ быть указано соответствующее положеніе точки.

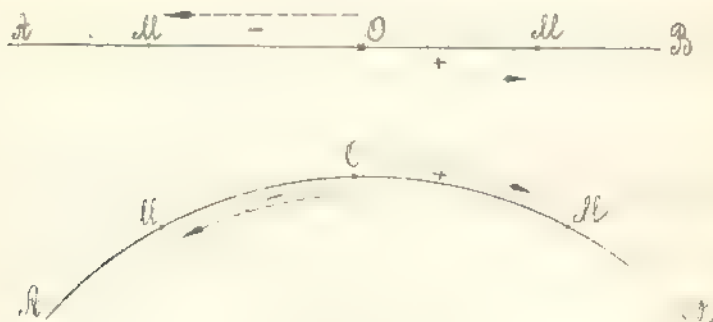
Моментъ времени опредѣляется слѣдующимъ образомъ.

Нѣкоторый произвольно выбранный моментъ времени мы принимаемъ за эпоху, т.е. за начало для отсчета времени; беремъ какую либо единицу времени, напримѣръ, секунду; измѣряемъ промежутокъ времени между эпохой и рассматриваемымъ моментомъ; найденному числу приписываемъ знакъ плюсъ или знакъ минусъ, смотря по тому, слѣдуетъ ли рассматриваемый моментъ за эпохой или предшествуетъ ей; полученное такимъ образомъ положительное или отрицательное число, опредѣляющее данный моментъ, обозначаемъ буквою  $t$ .

Если возьмемъ, напримѣръ, за эпоху 12 час. дня 26 Февраля, то для момента въ 9 часовъ утра того же дня  $t = - 3$  ч., а для момента въ 9 ч. утра слѣдующаго дня  $t = + 21$  часъ, или, проще,  $t = 21$  часъ.

Первый способъ для выраженія движенія точки.

Пусть дана траекторія точки: прямая или кривая (черт. 87).



Чертежъ 87.

Беремъ на траекторіи произвольно выбранную неподвижную точку  $O$ ; одну сторону траекторіи, напримѣръ,  $OB$ , условимся считать положительной, другую —  $OA$  — отрицательной.

Выбравъ затѣмъ единицу длины, напримѣръ, сантиметръ, измѣряемъ разстояніе по дугѣ траекторіи отъ точки  $O$  до положенія движущейся точки  $M$  въ моментъ  $t$ ; найденному числу приписываемъ знакъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, нахо-

дится ли точка  $M$  по положительную или по отрицательную сторону траектории; — полученное таким образом положительное или отрицательное число, определяющее положение точки на ее траектории, обозначим буквою

$$s = \pm OM.$$

При данной траектории уравнение:

$$s = l(t) \dots \dots \dots (1)$$

где  $l(t)$  есть известная функция от  $t$ , вполне определяет движение точки; — уравнение (1) называется уравнением движения точки.

При вышеуказанном условии относительно знака,  $s$  возрастает, когда точка движется в сторону, указанную сплошной стрелкой (в положительную сторону), и убывает при движении точки в сторону, указанную пунктирной стрелкой (в отрицательную сторону).

Примеры, в которых легко составить представление о движении точки: траектория или прямая, или дуга окружности, или винтовая линия; уравнение движения в каждом случае одно из следующих трех уравнений:

$$s = a + bt;$$

$$s = a + bt + ct^2;$$

$$s = a + bt^k.$$

где  $a, b, c, k$  данные постоянные величины.

Для наглядного представления движения точки служит кривая разстояний: откладываем в избранном масштабе по оси абсцисс  $X$  числа  $t$ , а по оси ординат  $Y$  соответствующие числа  $s$  для рассматриваемой движущейся точки; геометрическое место определяемых таким образом точек  $P$  (черт. 88) на плоскости  $XOY$  и будет кривою разстояний  $(P, Q)$  для данной

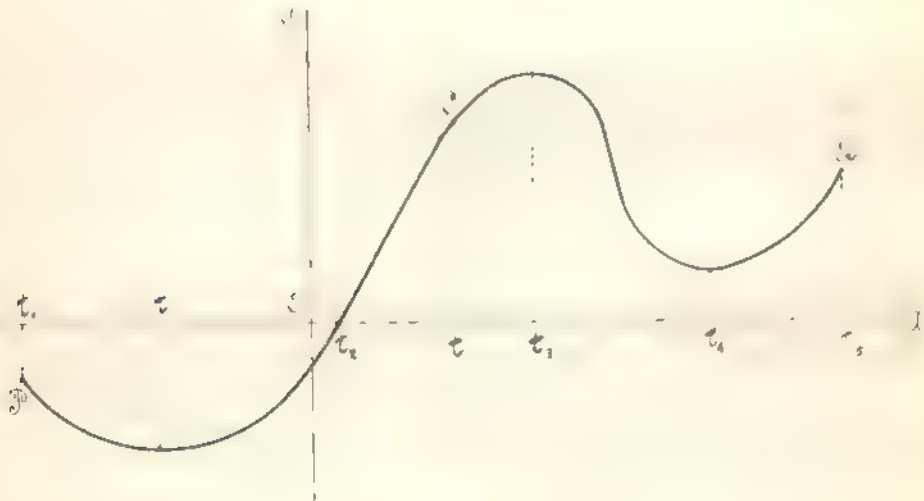
точки.

Уравненіе кривой разстояній въ координатахъ  $x$  и  $y$  получается изъ уравненія движенія послѣ того, какъ если замѣнимъ въ немъ перемѣнныя:  $t$  черезъ  $x$  и  $s$  черезъ  $y$ ; если уравненіе движенія точки

$$s = f(t),$$

то уравненіе кривой разстояній будетъ:

$$y = f(x).$$



Чертежъ 88.

Въ предыдущихъ примѣрахъ кривыя разстояній будутъ: въ первомъ - прямая, во второмъ - парабола, въ третьемъ - синусоида; уравненія этихъ кривыхъ соответственно:

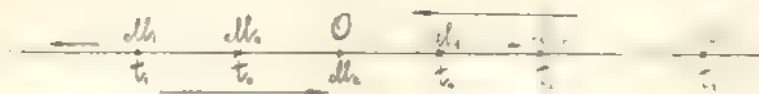
$$y = c + vx;$$

$$y = a + bx + cx^2;$$

$$y = a \sin kx.$$

Если кривая разстояній вычерчена, то при данной траекторіи нетрудно изслѣдовать движеніе точки; - напримѣръ, при кривой

разстояній, изображенной на черт.88, если траекторія прямая, движеніе происходит слѣдующимъ образомъ (черт.89):



Чертежъ 89.

отъ положенія  $M_1$  въ моментъ  $t_1$  точка движется влѣво до  $M_2$  (моментъ  $t_2$ ), отсюда вправо проходитъ черезъ точку  $M_3$  (моментъ  $t_3$ ) и затѣмъ достигаетъ положенія  $M_4$  (моментъ  $t_4$ ), далѣе движется влѣво до  $M_5$  (моментъ  $t_5$ ) и наконецъ вправо до  $M_6$  (моментъ  $t_6$ ).

Замѣтимъ, что во многихъ случаяхъ прямолинейнаго движенія можно получить кривыя разстояній, которая будетъ вычерчивать сама движущаяся точка, — наприимѣръ, на поверхности круглаго цилиндра, приведеннаго во вращательное движеніе часовымъ механизмомъ; таковы кривыя, показывающія температуру, высоту барометра, давленіе пара и т.д.

### Второй способъ для выраженія движенія точки.

Если траекторія точки не дана, то движеніе точки выражается, вообще говоря, тремя уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1(t) \\ y &= y_1(t) \\ z &= z_1(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  суть координаты точки, а  $x_1(t)$ ,  $y_1(t)$  и  $z_1(t)$  — известные функции отъ  $t$ .

Замѣтимъ, что каждое изъ уравненій (2) въ отдѣльности опредѣляетъ движеніе проекціи движущейся точки на одну изъ координатныхъ осей.

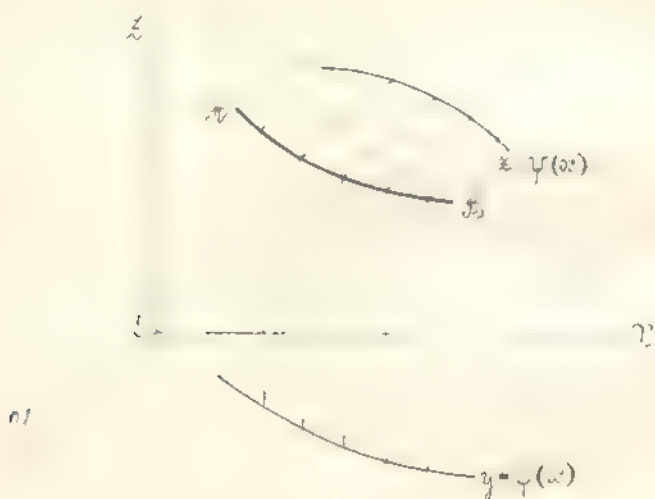


Исключая  $\tau$  из уравнений (2), мы получим уравнения двух цилиндрических поверхностей:

$$y = \varphi(x),$$

$$x = \psi(x).$$

линия пересѣченія которыхъ  $\mathcal{AB}$  (черт.90) и будетъ траекторіей точки.



Чертежъ 90.

Если движущаяся точка остается въ одной плоскости, то, принимая эту плоскость за плоскость  $\mathcal{O'z}$ , мы опредѣляемъ движеніе двумя уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\tau) \\ y &= y(\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2,)$$

третье уравненіе  $x=0$  можно не писать.

Исключая изъ этихъ уравненій  $\tau$ , находимъ уравненіе траекторіи точки:

$$y = f(x).$$

Если мы не сумѣемъ исключить  $\tau$  изъ уравненій (2.), то можемъ построить траекторію по точкамъ, пользуясь этими урав-

неннями; съ помощью тихъ же уравненій (2) можно и изслѣдовать траекторію.

Примѣры:

$$1. \quad \begin{aligned} x &= \alpha t, \\ y &= \beta t + \frac{g}{2} t^2. \end{aligned}$$

Траекторія:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{g}{2\alpha^2} x^2.$$

парабола.

$$2. \quad \begin{aligned} x &= a \cos kt, \\ y &= a \sin kt, \\ z &= ct. \end{aligned}$$

Уравненія траекторіи:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ z &= \frac{c}{k} \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Траекторія — винтовая линія.

Замѣтимъ, что для опредѣленія положенія точки нерѣдко, вмѣсто прямоугольныхъ координатъ, берутся другія координаты, наприкладъ, координаты полярныя.

Примѣръ:

$$\begin{aligned} r &= \alpha t, \\ \varphi &= k t; \end{aligned}$$

траекторія

$$r = \frac{\alpha}{k} \varphi.$$

архимедова спираль.

## § 2. Скорость точки.

Средняя скорость точки за промежуток времени отъ момента  $t_1$  до момента  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) есть отношение длины пути ( $\bar{l}$ ), пройденнаго точкою въ течение этого промежутка, къ величинѣ промежутка:

средняя скорость отъ  $t_1$  до  $t_2$  равна

$$\frac{\bar{l}}{t_2 - t_1}.$$

Если за время отъ  $t_1$  до  $t_2$  точка не измѣняетъ направленія своего движенія, то средняя скорость за этотъ промежутокъ времени равна абсолютной величинѣ отношенія:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

гдѣ  $s_1$  и  $s_2$  суть значенія  $s$ , соотвѣтствующія моментамъ  $t_1$  и  $t_2$ ; въ такомъ видѣ нельзя представить средней скорости за промежутокъ отъ  $t_1$  до  $t_2$ , если въ течение его направленіе движенія измѣнялось.

Единица средней скорости есть единица составная, символическое обозначеніе которой будетъ:

$$\frac{\text{един. дл.}}{\text{един. вр.}}, \text{ или } LT',$$

если условимся единицу длины обозначать черезъ  $L$ , а единицу времени — черезъ  $T$ ; принимая за единицу длины сантиметръ  $C$ , а за единицу времени секунду  $S$ , мы будемъ имѣть единицу средней скорости, равную

$$CS'.$$

Если средняя скорость остается постоянной, движеніе точки называется равномернымъ; общее уравненіе равномернаго движе-

нія будетъ:

$$s = a + bt.$$

гдѣ  $a$  и  $b$  величины постоянныя; траекторія точки при этомъ можетъ быть какая угодно.

Средняя скорость, равная единицѣ, получается при равномерномъ движеніи точки, которая въ единицу времени проходитъ единицу длины; уравненіе такого движенія будетъ:

$$s = t.$$

**Опредѣленіе.** Величина ( $v$ ) скорости точки въ моментъ  $t$  есть предѣлъ, къ которому стремится средняя скорость точки за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ  $t$  (или обща, заключающій въ себѣ моментъ  $t$ ), при уменьшеніи этого промежутка до нуля.

Изъ этого предложенія слѣдуетъ, что величина скорости точки въ моментъ  $t$  равна абсолютной величинѣ производной  $\left| \frac{ds}{dt} \right|$ :

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| \dots \dots \dots (*) \dots \dots \dots (3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\Delta t$  \*\*) промежутокъ времени, слѣдующій за моментомъ  $t$  и достаточно малый для того, чтобы направление движенія точки въ теченіе этого промежутка не измѣнялось; моментамъ  $t$  и  $t + \Delta t$  соответствуютъ значенія  $s$  и  $s + \Delta s$ ; тогда средняя скорость равна  $\left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|$ , но  $s$  есть функція отъ  $t$ :

$$s = f(t);$$

слѣдовательно:

\*) Для обозначенія абсолютной величины какого либо выраженія далѣе мы будемъ ставить это выраженіе въ прямыхъ скобкахъ  $\left| \right|$ .

\*\*)  $\Delta$  есть греческая большая буква "дельта" и  $\Delta t$  читается: "дельта  $t$ "; буква  $\Delta$  часто употребляется для обозначенія безконечно-малого приращенія какой либо переменной величины.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|.$$

Такимъ образомъ, имеемъ:

$$v = \left| \dot{s}(t) \right|. *)$$

Знакъ производной показываетъ въ какую сторону точка движется въ моментъ  $t$  : если  $\frac{ds}{dt} > 0$ , точка движется въ сторону возрастания  $s$ , если же  $\frac{ds}{dt} < 0$ , точка движется въ сторону убывания  $s$ .

При равномерномъ движеніи скорость точки въ каждый моментъ одна и та же и равна средней скорости:

$$s = a + bt;$$

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |b|.$$

Для нагляднаго представленія величинъ скорости точки въ различные моменты служить кривая скоростей, которая строится слѣдующимъ образомъ:

откладываемъ въ избранномъ масштабѣ по оси абсциссъ (0x) числа  $t$ , по оси ординатъ (0y) соответствующія значенія производной  $\frac{ds}{dt}$  геометрическое мѣсто опредѣляемыхъ такимъ образомъ точекъ на плоскости и будетъ кривая скоростей.

Уравненіе кривой скоростей въ координатахъ  $x$  и  $y$  получается изъ уравненія:

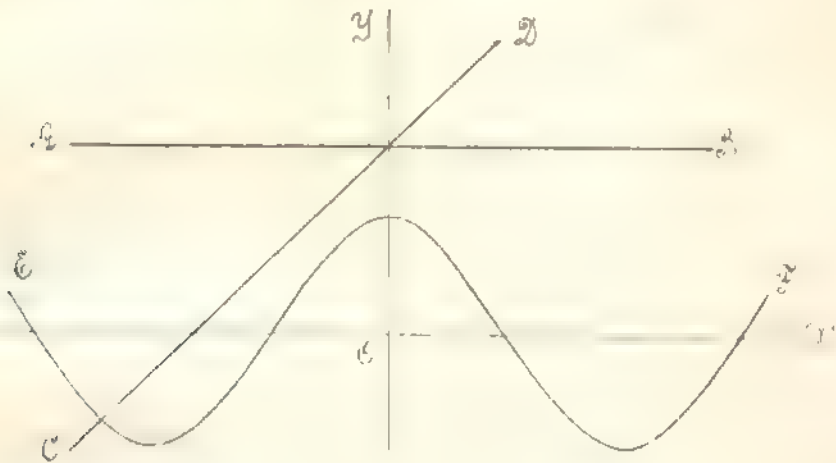
-----  
\*) Для сокращенія письма мы нередко будемъ обозначать первыя производныя по  $t$  однимъ значкомъ  $'$ , вторыя — двумя значками  $''$ , такъ что:

$$s' = \frac{ds}{dt}, \quad \dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt},$$

$$s'' = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \ddot{s}(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2}, \text{ и т. д.}$$

$$\frac{ds}{dt} = v(t),$$

если замѣнить въ немъ  $\frac{ds}{dt}$  черезъ  $y$ , а  $t$  черезъ  $x$ .



Чертежъ 91.

На чертежѣ 91 изображены кривыя скоростей для движеній, уравненія которыхъ суть:

$$s = a + bt \text{ (при } b > 0) \dots\dots\dots AB,$$

$$s = a + bt + ct^2 \text{ (при } b > 0, c > 0) \dots CD,$$

$$s = a \cdot \sin kt \text{ (при } a > 0) \dots\dots\dots EF.$$

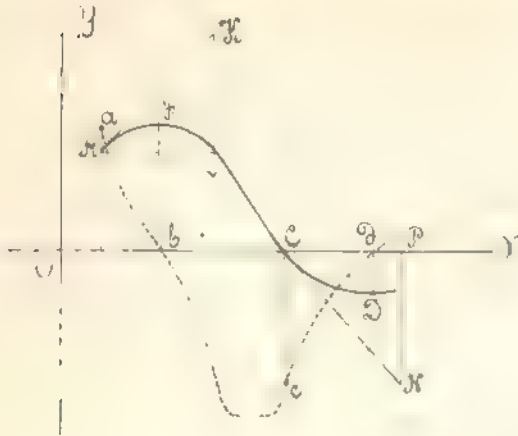
Замѣтимъ, что производная  $\frac{ds}{dt}$  равна tangens'у угла, образуемаго касательною къ кривой разстояній съ осью  $OX$ ; поэтому кривую скоростей можно построить, имея только кривую разстояній.

Пусть  $AL$  (черт. 92) кривая разстояній. Проводимъ въ точкѣ  $A$  касательную ( $AK$ ) и прямую  $AL$ , параллельную оси  $OX$ , равную единицѣ длины; изъ точки  $L$  проводимъ затѣмъ прямую  $LK \parallel OY$  до пересѣченія съ касательной въ точкѣ  $K$ ; тогда

$$LK = t_y \angle KAL,$$



и слѣдовательно, ордината точки кривой скоростей, соответствующей тому же моменту времени, что и  $\alpha$ , будетъ равна  $\tau^2$ ; такимъ образомъ находимъ точку  $\alpha$ .



Такимъ же построениемъ найдемъ ординату точки кривой скоростей, соответствующей любой точкѣ кривой разстояній, напримеръ, точкѣ  $c$  соответствующей точка  $e$ , для которой

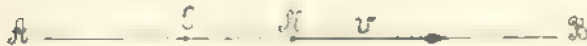
$$ce = dx$$

Чертежъ 92.

АД въ точкѣ  $c$ ,  $cd =$  единица длины,  $dx \perp cy$ ; для точекъ  $d$  и  $e$ , гдѣ касательныя къ кривой разстояній параллельны оси  $X$ , ординаты соответствующихъ точекъ  $f$  и  $g$  равны нулю.

Геометрическое мѣсто точекъ  $a, b, c, d$  и будетъ кривая скоростей.

Скорости точки въ моментъ  $t$ , кроме величины, приписывается нѣкоторое направленіе.



При прямолинейномъ движеніи отрезокъ, изображающій величину скорости

Чертежъ 93.

въ избранномъ масштабѣ, естественно направить отъ положенія точки по траекторіи въ сторону движенія (черт. 93).

Отсюда уже будетъ слѣдовать, что при криволинейномъ движеніи отрезокъ, изображающій величину скорости, нужно откладывать отъ положенія точки по касательной къ траекторіи въ

сторону движенія.

**Выводъ.** Криволинейное движеніе точки  $M$  можно рассматри-  
вать, какъ предѣльный случай ряда прямолинейныхъ равномерныхъ  
движеній по сторонамъ вписаннаго многоугольника при томъ ус-  
ловіи, чтобы въ вершины  $M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$  точка прихо-  
дила въ одно и то же время, какъ при криволинейномъ, такъ и

при прямолинейномъ  
движеніи (черт. 94).



Чертежъ 94.

Скорость точки  
 $M$  въ прямолиней-  
номъ движеніи  $M_1M_2$   
направлена по съ-  
кущей  $M_1M_2$ ; когда,  
увеличивая число  
сторонъ, мы перей-  
демъ къ предѣлу,  
эта съкущая обра-

тится въ касательную  $MT$ , по которой и будетъ направлена ско-  
рость точки  $M$  въ криволинейномъ движеніи.

На основаніи всего сказаннаго нетрудно найти величину и  
направленіе скорости въ моментъ  $t$ , если движеніе опредѣляет-  
ся по первому способу, т.е. дается траекторія и уравненіе дви-  
женія: во уравненіи

$$s = f(t),$$

находимъ положеніе точки  $M$  въ моментъ  $t$  на данной траекто-

"ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I. Проф. И. В. ИВАНОВСКИЙ.

Изданіе Каасы Взаимопомощи Студ. СПб. Политехи. Института.

Типо-литографія И. Трофимова. СПб. Мѣйская, 3.

Корректоръ А. Рабакинъ.

Листъ 9.

рін, проводимъ касательную къ траекторіи въ сторону движенія и откладываемъ отрѣзокъ:

$$d\mathcal{K} = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |f'(t)|.$$

Если движеніе точки опредѣляется по второму способу, т.е. даются уравненія:

$$x = f_1(t),$$

$$y = f_2(t),$$

$$z = f_3(t),$$

то величину и направленіе скорости въ моментъ  $t$  мы находимъ, пользуясь слѣдующими выраженіями для проекцій скорости на координатныя оси:

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v, X) &= \frac{dx}{dt}, \\ v \cos(v, Y) &= \frac{dy}{dt}, \\ v \cos(v, Z) &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

**Выводъ формулъ (4).**

Пусть  $M$  и  $M_1$  (черт. 94) положенія движущейся точки въ моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ , координаты ихъ  $x, y, z$  и  $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ .

Проекціи хорды  $MM_1$  на координатныя оси будутъ:

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z.$$

Скорость точки  $M$  въ прямолинейномъ равномерномъ движеніи по хордѣ  $MM_1$  будетъ

$$MA = \frac{\text{хорда } MM_1}{\Delta t};$$

проекціи этой скорости равны

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t};$$

отсюда слѣдуетъ, что проекціи скорости  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  въ криволинейномъ движеніи точки  $M$  будутъ:

$$\pi_{x0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{t=t_0} = \frac{dx}{dt} ;$$

$$\pi_{y0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)_{t=t_0} = \frac{dy}{dt} ;$$

$$\pi_{z0} \left( \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)_{t=t_0} = \frac{dz}{dt} ;$$

Изъ формулъ (4) слѣдуютъ формулы (5) для величины и направленія скорости:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ \cos(v, X) &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \\ \cos(v, Y) &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \\ \cos(v, Z) &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Если движущаяся точка остается въ одной плоскости, то, принимая эту плоскость за плоскость  $O'OX$ , величину и направленіе скорости мы опредѣлимъ по формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{x'^2 + z'^2} \\ \cos(v, X) &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} \\ \cos(v, Z) &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Если заданы: скорость точки (ея величина и направленіе или проекціи на координатныя оси) для каждаго момента времени  $t$  и, кромѣ того, положеніе точки въ одинъ опредѣленный моментъ  $t_0$ ,

то мы можем опредѣлить движеніе точки съ помощью интегрированія.

Примѣры.

Дано: величина скорости постоянна:  $v = a$  ; уголъ  $\varphi$  , который ея направленіе составляетъ съ осью  $X$  , возрастаетъ пропорціонально времени:

$$\varphi = kt;$$

въ моментъ  $t=0$  , точка находится въ началѣ координатъ.

Опредѣлимъ движеніе точки. Имѣемъ:

$$x' = a \cos kt ;$$

$$y' = a \sin kt ;$$

отсюда

$$x = \frac{a}{k} \sin kt + \text{const.};$$

$$y = -\frac{a}{k} \cos kt + \text{const.}$$

но при  $t=0$

$$x=0 ,$$

$$y=0 ,$$

слѣдовательно, первая постоянная равна нулю, вторая  $=\frac{a}{k}$  ; и мы получаемъ уравненія движенія точки

$$x = \frac{a}{k} \sin kt .$$

$$y = \frac{a}{k} (1 - \cos kt) .$$

### § 3. Ускореніе точки.

При всякомъ движеніи точки, кромѣ движенія прямолинейнаго и равномернаго, скорость измѣняется или по величинѣ, или по направленію, или и по величинѣ и по направленію.

Пусть скорость точки въ моментъ  $t$  будетъ  $v$  , а въ мо-

ментъ  $t + \Delta t$  будетъ  $M, K_1$  (черт. 95); проведемъ прямую  $M L$ ,  
равную по величинѣ и направленію  $M, K_1$ ; соединимъ точки  $K$  и



Чертежъ 95.

$L$ , тогда прямая  $K L$ ,  
направленная отъ  $K$   
къ  $L$ , будетъ геоме-  
трическая равенство  
между скоростью  $M, K_1$   
и скоростью  $M K$ , такъ  
какъ геометрическая  
сумма  $M K + K L = M L =$   
 $= M, K_1$ ; ; прямая  $M K$ ,

имѣющая ту же величину и то же направленіе, что и  $K L$ , назы-  
вается измѣненіемъ скорости точки за время отъ  $t$  до  $t + \Delta t$ .

Отношеніе измѣненія скорости точки къ величинѣ соответст-  
вующаго промежутка  $\frac{M K}{\Delta t}$  изображено на чертежѣ прямою  $M, P$ .

Опредѣленіе.

Ускореніе точки въ моментъ  $t$  есть предѣлъ, къ которому  
стремится отношеніе измѣненія скорости точки за промежутокъ  
времени, начинающійся въ моментъ  $t$  (или вообще, заключающій  
въ себя моментъ  $t$ ), къ величинѣ этого промежутка при умень-  
шеніи его до нуля.

Пусть

$$M K = \text{пред.} (M P)_{\Delta t \rightarrow 0},$$

тогда ускореніе, которое мы обозначимъ черезъ  $\ddot{v}$ , будетъ:

$$\ddot{v} = M K.$$

по величинѣ и направленію.

Единица ускоренія есть единица составная; символическое  
обозначеніе ея будетъ:

$$\text{Един. ускор.} = \frac{\text{ед. скор.}}{\text{ед. врем.}} = \frac{\text{ед. длины}}{(\text{ед. врем.})^2} = \underline{\underline{L T^{-2}}}$$



Въ прямолинейномъ движеніи, уравненіе котораго есть

$$s = ct^2,$$

гдѣ  $c$  — постоянная положительная величина, скорость точки въ



моментъ  $t$  равна  $2ct$ , а

въ моментъ  $t + \Delta t$  ...

...  $2c(t + \Delta t)$  слѣдователь-

Чертежъ 96.

но измѣненіе скорости рав-

но  $2c \Delta t$  и направлено въ сторону движенія, а потому ускоре-

ніе точки въ моментъ  $t$  будетъ отрѣзокъ прямой  $MM'$ , равный

$2c$  и направленный въ сторону движенія (черт. 96).

Прямолинейное движеніе, въ которомъ ускореніе въ каждый моментъ имѣетъ одну и ту же величину, называется равноускореннымъ движеніемъ:

Общее уравненіе равноускореннаго движенія есть

$$s = a + bt + ct^2,$$

гдѣ  $a$ ,  $b$  и  $c$  величины постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ скорость точки въ моментъ  $t$  равна  $|b + 2ct|$ , въ моментъ  $t + \Delta t$  ...  $|b + 2c(t + \Delta t)|$ ; слѣдовательно, измѣненіе скорости равно  $2c \Delta t$ , а потому величина ускоренія будетъ  $|2c|$ .

Ускореніе, равное единицѣ, получается при прямолинейномъ равноускоренномъ движеніи, когда точка, выйдя изъ состоянія покоя, въ первую единицу времени (напримѣръ, въ первую секунду) пройдетъ половину единицы длины (напримѣръ,  $\frac{1}{2}$  сантиметра): уравненіе такого движенія можетъ быть написано въ видѣ

$$s = \frac{1}{2} t^2;$$

слѣдовательно:

$$\dot{v} = 1.$$

Проекціи ускоренія точки на координатныя оси выражаются слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v}, X) &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ \dot{v} \cos(\dot{v}, Y) &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ \dot{v} \cos(\dot{v}, Z) &= \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

Выводъ формулъ (7).

Проекціи на координатныя оси скорости  $\dot{v}$  (черт.95) суть производныя:  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ ; проекціи скорости  $\dot{v}$  будутъ  $\dot{x} + \Delta \dot{x}$ ,  $\dot{y} + \Delta \dot{y}$ ,  $\dot{z} + \Delta \dot{z}$ . следовательно, проекціи прямой  $\dot{v}$ , а также и измѣненія скорости  $\dot{v}$  будутъ  $\Delta \dot{x}$ ,  $\Delta \dot{y}$ ,  $\Delta \dot{z}$ , а такъ какъ

$$\dot{v} = \frac{\dot{v} \dot{x}}{\Delta \dot{x}},$$

то проекціи  $\dot{v}$  будутъ

$$\frac{\Delta \dot{x}}{\Delta \dot{x}}, \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta \dot{x}}, \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta \dot{x}};$$

отсюда слѣдуетъ, что проекціи ускоренія  $\ddot{v}$  на координатныя оси равны:

$$\pi_{\dot{v} \dot{x}} \left( \frac{\Delta \dot{x}}{\Delta \dot{x}} \right)_{\dot{v} \dot{x}} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\pi_{\dot{v} \dot{y}} \left( \frac{\Delta \dot{y}}{\Delta \dot{x}} \right)_{\dot{v} \dot{y}} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\pi_{\dot{v} \dot{z}} \left( \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta \dot{x}} \right)_{\dot{v} \dot{z}} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Изъ формулъ (7) слѣдуютъ выраженія, опредѣляющія величину и направленіе ускоренія точки въ моментъ  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ \cos(\dot{v}, X) &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ \cos(\dot{v}, Y) &= \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ \cos(\dot{v}, Z) &= \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

Если движущаяся точка остается въ одной плоскости, то, принимая эту плоскость за плоскость  $OX$ , величину и направление ускорения мы опредѣлимъ по формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= \sqrt{x''^2 + y''^2}, \\ \cos(\dot{v}, X) &= \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}, \\ \cos(\dot{v}, Y) &= \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Если точка движется по прямой лини, то, принимая эту прямую за ось  $OX$ , величину и направление ускорения мы опредѣлимъ съ помощью формулы:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, X) = \frac{d^2x}{dt^2};$$

откуда

$$\dot{v} = \left| \frac{d^2x}{dt^2} \right|,$$

$$\cos(\dot{v}, X) = 1,$$

т.е. ускорение направлено въ положительную сторону оси  $OX$ , если  $\frac{d^2x}{dt^2} \geq 0$ , и

$$\cos(\dot{v}, X) = -1,$$

т.е. ускорение направлено въ отрицательную сторону оси  $OX$ , если  $\frac{d^2x}{dt^2} < 0$ .

Вводя прежнее обозначение  $s$ , вместо  $x$ , мы получимъ, что въ прямолинейномъ движеніи ускорение точки равно абсолютной величинѣ второй производной отъ  $s$  по  $t$ :

$$\dot{v} = \left| \frac{d^2s}{dt^2} \right| \dots\dots\dots (10)$$

и направлено въ положительную сторону траекторіи, если  $\frac{d^2s}{dt^2} > 0$ ,  
- въ отрицательную сторону, если  $\frac{d^2s}{dt^2} < 0$ .

*Примѣръ.*

Найдемъ ускореніе точки въ равномерномъ движеніи ея по окружности (черт.97):

$$x = a \cos kt,$$

$$y = a \sin kt.$$

Получаемъ:

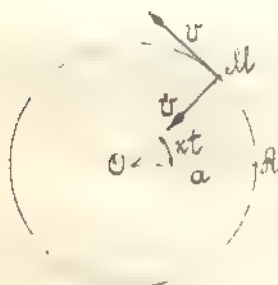
$$x'' = -a k^2 \cos kt,$$

$$y'' = -a k^2 \sin kt,$$

слѣдовательно, ускореніе имѣетъ постоянную величину

$$\ddot{r} = a k^2,$$

и направлено по радіусу точки къ центру окружности.



Чертежъ 97.

Если заданы: ускореніе точки (его величина и направленіе или проекціи на координатныя оси) для каждаго момента времени  $t$ , кромѣ того, положеніе и скорость точки въ одинъ опредѣленный моментъ, то мы можемъ съ помощью интегрированія опредѣлить сначала скорость точки,

а затѣмъ и движеніе точки.

*Примѣръ.*

Дано: ускореніе постоянно по величинѣ и направленію - оно равно  $g$  (напримѣръ,  $g = 981 \frac{\text{сантм}}{(\text{сек})^2}$ ) и направлено по вертикали внизъ; въ моментъ  $t = 0$  точка находится въ началѣ координатъ и имѣетъ скорость  $a$ , составляющую уголъ  $\alpha$  съ горизонтомъ (черт.98).

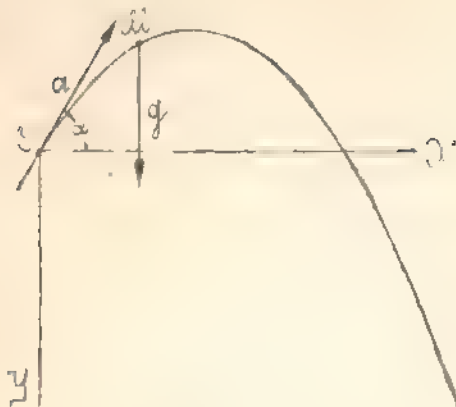
Опредѣлить скорость и движеніе точки.

Пусть ось  $Ox$  горизонтальна, ось  $Oy$  направлена по вертикали внизъ.

Имѣемъ:

$$x''=0, \quad y''=g;$$

при  $t=0$



$$x_0=0,$$

$$y_0=0;$$

$$x'_0=a \cos \alpha,$$

$$y'_0=a \sin \alpha;$$

находимъ:

$$x'=\text{const.},$$

$$y'=gt+\text{const.};$$

слѣдовательно:

$$x'=a \cos \alpha,$$

$$y'=gt+a \sin \alpha;$$

отсюда

$$x=at \cos \alpha + \text{const.},$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2+at \sin \alpha + \text{const.};$$

но эти постоянныя должны быть равны нулю, слѣдовательно, находимъ:

$$x=at \cos \alpha,$$

$$y=at \sin \alpha + \frac{1}{2}gt^2,$$

траекторія точки - парабола.

#### § 4. Поступательное движеніе твердаго тѣла.

Тѣло движется поступательно тогда, когда двѣ канія либо пересѣкающіяся плоскости, проведенныя черезъ точки тѣла, остаются при движеніи тѣла себѣ параллельными.

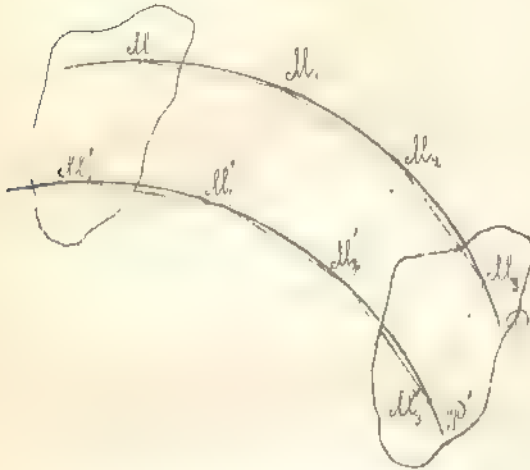
Отсюда слѣдуетъ, что при поступательномъ движеніи тѣла, всякая плоскость, проведенная черезъ точки тѣла, остается себѣ параллельною, а потому и всякая прямая, проведенная черезъ

точки тѣла, также остается себѣ параллельною.

Рассмотримъ траекторіи, скорости и ускоренія точекъ тѣла.

1. Траекторіи. При поступательномъ движеніи траекторіи

всѣхъ точекъ тѣла суть *совпадающія* линіи, т. е. такія, которыя при наложеніи могутъ быть совмѣщаемы другъ съ другомъ (черт.99).



*Доказательство.*

Пусть  $MP$  и  $M'P'$  - траекторіи точекъ  $M$  и  $M'$ ; пусть  $M_1$  и  $M'_1$ ,  $M_2$  и  $M'_2$ ,  $M_3$  и  $M'_3$ .....

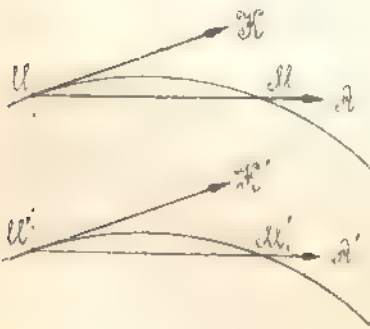
Чертежъ 99.

будутъ одновременныя по-

ложенія этихъ точекъ; прямыя  $M_1M'_1$ ,  $M_2M'_2$ ,  $M_3M'_3$ ..... равны и параллельны, слѣдовательно, стороны многоугольниковъ  $M_1M_2M_3$ ,  $M_2M_3M_4$ ,  $M_3M_4M_5$ , ..... и  $M'_1M'_2M'_3$ ,  $M'_2M'_3M'_4$ ,  $M'_3M'_4M'_5$ , ..... соответственно равны и параллельны; увеличивая число сторонъ многоугольниковъ и переходя къ предѣлу, получаемъ высказанную теорему.

2. Скорости. При поступательномъ движеніи скорости всѣхъ

точекъ тѣла въ каждый моментъ имѣютъ одинаковую величину и одинаковое направленіе.



*Доказательство.*

Пусть  $M$  и  $M'$  - положенія двухъ точекъ тѣла въ моментъ  $t$ ,  $M_1$  и  $M'_1$  - положенія ихъ въ моментъ  $t + \Delta t$  (черт.100); пусть

Чертежъ 100.



$$M\dot{X} = \frac{M(M_1 - M_2)}{\Delta t},$$

$$M'\dot{X}' = \frac{M'(M'_1 - M'_2)}{\Delta t};$$

тогда

$$M\dot{X} \neq M'\dot{X}';$$

уменьшая промежутки  $\Delta t$  и переходя къ предѣлу, находимъ, что скорости:

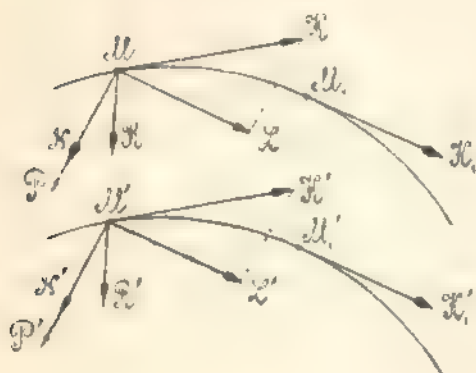
$$M\dot{X} \neq M'\dot{X}'.$$

Скорость, общая всемъ точкамъ тѣла, называется скоростью тѣла.

3. Ускоренія. При поступательномъ движеніи ускоренія всехъ точекъ тѣла въ каждый моментъ имѣютъ одинаковую длину и одинаковое направленіе.

Доказательство.

Скорости двухъ точекъ въ моментъ  $t$  (черт. 101)



Чертежъ 101.

$$M\dot{X} \neq M'\dot{X}'$$

и въ моментъ  $t + \Delta t$

$$M\dot{X}_1 \neq M'\dot{X}'_1;$$

слѣдовательно, и измененія скорости

$$M\dot{X} \neq M'\dot{X}'; \quad *)$$

поэтому векторы:  $M\dot{X}$ , равный  $\frac{M(X_1 - X)}{\Delta t}$  и  $M'\dot{X}'$ , равный  $\frac{M'(X'_1 - X')}{\Delta t}$ , рав-

ны и одинаково направлены; уменьшая  $\Delta t$  и переходя къ предѣлу, находимъ, что ускоренія

$$M\ddot{X} \neq M'\ddot{X}'.$$

\*)  $M\dot{X} \neq X_2$ ,  $M'\dot{X}' \neq X'_2$ .

Ускореніе, общее всѣмъ точкамъ тѣла, называется *ускореніемъ тѣла*.

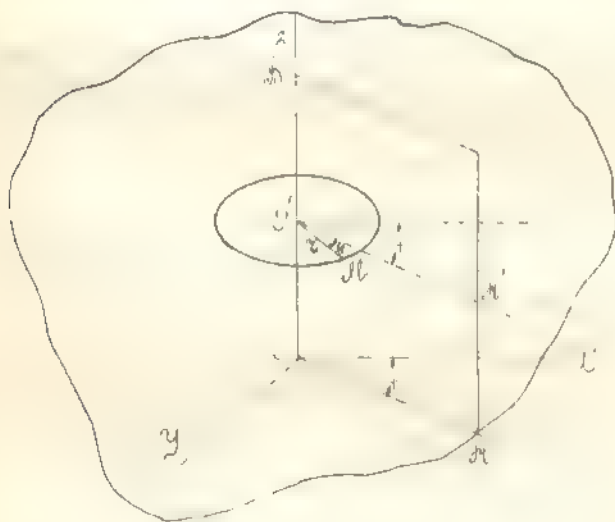
Такимъ образомъ, *поступательное движеніе тѣла* вполне определяется движеніемъ одной изъ его точекъ; — имѣя уравненіе движенія какой либо точки  $M(x, y, z)$  тѣла, движущагося поступательно:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

мы можемъ найти видъ траекторіи, скорость и ускореніе тѣла.

### § 5. Вращеніе тѣла вѣкрутъ неподвижной оси.

Ось вращенія тѣла\*) примемъ за ось  $OX$  (черт. 102); проведемъ черезъ ось вращенія и точки тѣла какую либо плоскость  $ABC$ ;



Чертежъ 102.

уголъ, составляемый этой плоскостью съ плоскостью  $AOX$ , т. е.  $\angle AOC$ , называется "уголъ поворота" тѣла; обозначимъ черезъ  $\varphi$  величину угла поворота, выраженную въ частяхъ радіуса и взятую со зна-

комъ плюсъ, когда уголъ отсчитывается отъ положительной оси  $OX$ , къ положительной оси  $OY$ , т. е. по часовой стрѣлкѣ, и со знакомъ минусъ — при отсчетѣ въ противоположную сторону.

\*) Предполагаемъ, что ось вращенія или принадлежитъ тѣлу или рассматривается, какъ неизмѣнно съ нимъ связанная.

Уравнение:

$$\varphi = f(\tau), \dots \dots \dots (11)$$

гдѣ  $f(\tau)$  - известная функція отъ времени  $\tau$ , вполне опредѣляюща движенье тѣла.

Разсмотримъ траекторіи, скорости и ускоренія точекъ тѣла.

1. Траекторіи. При вращеніи тѣла около оси траекторія каждой точки  $m$  тѣла есть дуга окружности круга, плоскость котораго перпендикулярна къ оси вращенія, центръ лежитъ на оси, а радіусъ равенъ кратчайшему разстоянію  $r$  точки до оси.

Пусть  $\angle xOx' = \varphi$ ,  $\angle x'Ox'' = \theta$ ; уголъ  $\angle x'Ox''$  обозначимъ черезъ  $\theta$ ; уголъ  $\theta$  имѣетъ одну и ту же величину для точекъ тѣла, лежащихъ въ одной плоскости, проходящей черезъ ось вращенія.

При вращеніи тѣла для каждой его точки  $m$  остаются постоянными величины:  $r$  и  $\theta$ ; координаты же  $x$  и  $y$  измѣняются съ теченіемъ времени и выражаются по формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \varphi), \\ y &= r \sin(\theta + \varphi). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

## 2. Скорости.

Опредѣленіе. Угловая скорость тѣла въ моментъ  $\tau$  есть предѣлъ отношенія приращенія угла поворота за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ  $\tau$  (или вообще - заключающій въ себѣ моментъ  $\tau$ ), къ величинѣ этого промежутка, при уменьшеніи его до нуля.

Величина угловой скорости ( $\omega$ ) равна абсолютной величинѣ первой производной отъ угла поворота по времени:

$$\omega = \text{Пре.} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right|_{\Delta t \rightarrow 0} = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

Знакъ производной  $\frac{d\varphi}{dt}$  указываетъ, въ какую сторону въ мо-

ментъ  $\tau$  тѣло вращается: наблюдатель, помѣщенный такъ, что ось  $OZ$  проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видитъ тѣло вращающимся слѣва направо, когда  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$  и справа налѣво, когда  $\frac{d\varphi}{dt} < 0$

Единица угловой скорости:

$$\frac{\text{в. отвлеч.}}{\text{в. врем.}} = \frac{1}{\text{в. врем.}} = T^{-1}.$$

Вращеніе называется *равномернымъ*, если угловая скорость постоянна.

Уравненіе равномернаго вращенія будетъ:

$$\varphi = \alpha + \beta t.$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$  — величины постоянныя.

Угловая скорость, равная единицѣ, получается при равномерномъ вращеніи тѣла, когда оно въ единицу времени (напримѣръ, въ одну секунду) поворачивается на уголъ, равный единицѣ, т. е. на уголъ:  $57^\circ 17'$ .

Если тѣло дѣлаетъ  $n$  оборотовъ въ секунду, то угловая скорость его равна:

$$2\pi n \cdot \frac{1}{\text{сек.}}.$$

Проекціи скорости какой либо точки тѣла  $M$  на координатныя оси находимъ по формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} v \cdot \cos(\nu, X) &= -y \varphi', \\ v \cdot \cos(\nu, Y) &= x \varphi', \\ v \cdot \cos(\nu, Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

Эти формулы получаются дифференцированіемъ по времени формулъ (12) и уравненія  $x = \text{const.}$

$$\left. \begin{aligned} x' &= -r \sin(\theta + \varphi) \varphi' = -y \varphi', \\ y' &= r \cdot \cos(\theta + \varphi) \varphi' = x \varphi', \\ z' &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13.)$$

Изъ формулъ (13) слѣдуетъ:

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} \cdot |\varphi'| = r \cdot \omega ,$$

$$\cos(v, X) = \frac{y'}{r} ,$$

$$\cos(v, Y) = \frac{x'}{r} ;$$

такъ какъ

$$\cos(O'M, X) = \frac{x}{r} ,$$

$$\cos(O'M, Y) = \frac{y}{r} ,$$

то

$$\cos(v, O'M) = 0 ,$$

слѣдовательно,  $v \perp O'M$  ; кромѣ того, очевидно, скорость точки, координаты которой суть  $x = 1$ ,  $y = 0$ , направлена по положительной оси  $XY$ , если  $\varphi > 0$ , и по отрицательной оси  $XY$ , если  $\varphi < 0$ .

Такимъ образомъ, изъ формулъ (13) приходимъ къ слѣдующему заключенію.

При вращеніи тѣла около оси скорость всякой точки равна произведенію угловой скорости на кратчайшее разстояніе точки до оси ( $v = r \omega$ ) и направлена по перпендикуляру къ кратчайшему разстоянію въ сторону движенія часовой стрѣлки или въ сторону противоположную, смотря по знаку производной  $\varphi'$  (ч. 103)\*).

Отсюда заключаемъ, что угловая скорость тѣла, вращающагося вокругъ оси, можетъ быть опредѣлена, какъ отношеніе скорости какой либо точки тѣла къ ея кратчайшему разстоянію до оси:

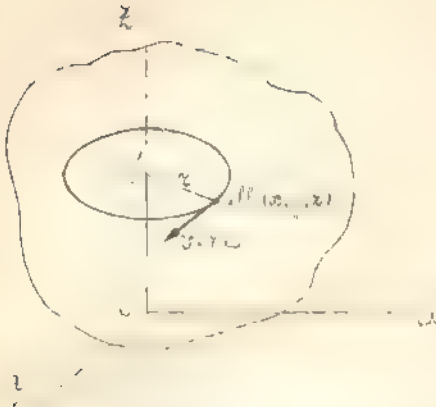
$$\omega = \frac{v}{r} .$$

### 3. Ускоренія.

Опредѣленіе. Угловое ускореніе тѣла въ моментъ  $t$  есть

-----

\*) Это заключеніе о скорости вытекаетъ непосредственно изъ того, что сказано выше о траекторіи точки и объ угловой скорости тѣла.



Чертежъ 109.

предѣлъ отношенія приращенія угловой скорости тѣла за промежутокъ времени, начинающійся въ моментъ  $t$  (или вообще, заключающій въ себѣ моментъ  $t$ ), къ величинѣ этого промежутка, при уменьшеніи его до нуля.

Величина углового ускоренія ( $\dot{\omega}$ ) равна абсолютной величинѣ второй производной отъ угла поворота по времени,  $\left| \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right|$ :

$$\dot{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi'}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right|.$$

Проекціи ускоренія какой либо точки тѣла  $\dot{v}$  на координатныя оси находимъ по формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} \cos(\dot{v}, X) &= -y \varphi'' - x \varphi'^2, \\ \dot{v} \cos(\dot{v}, Y) &= x \varphi'' - y \varphi'^2, \\ \dot{v} \cos(\dot{v}, Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Формулы (14) получаются дифференцированіемъ по времени  $t$  формулъ (13.); онѣ показываютъ, что ускореніе всякой точки тѣла равно геометрической суммѣ двухъ ускореній: проекціи одного выражаются первыми членами правыхъ частей формулъ (14), а проекціи другого — ихъ вторыми членами\*).

\*). См. примѣчаніе на стр. 85 "Статистики".



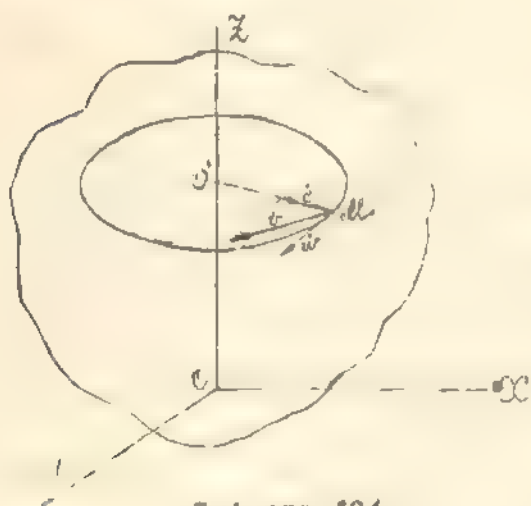
Ускорение  $\dot{\omega}$ , проекции которого на координатные оси выражаются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega} \cos(\dot{\omega}, X) &= -\psi \varphi'', \\ \dot{\omega} \cos(\dot{\omega}, Y) &= -\chi \varphi'', \\ \dot{\omega} \cos(\dot{\omega}, Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

называется *вращательным ускорением* точки ...

Тѣмъ же способомъ, какъ изъ формулъ (13) мы опредѣляли величину и направленіе скорости точки, изъ формулъ (15) мы находимъ, что *вращательное ускореніе* точки по величинѣ равно произведенію углового ускоренія на кратчайшее разстояніе точки до оси ( $\dot{\omega} = \psi \cdot \dot{\omega}$ ) и направлено по перпендикуляру къ кратчайшему разстоянію въ сторону часовой стрѣлки, если  $\varphi'' > 0$ , и въ сторону противоположную, если  $\varphi'' < 0$  (черт. 104).

Ускореніе  $\dot{c}$ , проекции котораго на координатные оси выражаются по формуламъ:



Чертежъ 104.

$$\left. \begin{aligned} \dot{c} \cos(\dot{c}, X) &= -x \varphi'', \\ \dot{c} \cos(\dot{c}, Y) &= -y \varphi'', \\ \dot{c} \cos(\dot{c}, Z) &= 0. \end{aligned} \right\} (16)$$

называется *центростремительнымъ ускореніемъ* точки

и.

Изъ формулъ (16) слѣдуетъ:

$$\dot{c} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \varphi'' = r \cdot \varphi''.$$

$$\dot{c} \cos(\dot{c}, C) = -\frac{c^2}{r},$$

$$\dot{c} \cos(\dot{c}, Z) = -\frac{z}{r} \cdot \dot{c}^2.$$

следовательно, ускорение  $\ddot{c}$  направлено противоположно  $cM$ . Таким образом получаемъ, что центростремительное ускорение точки по величинѣ равно произведенію квадрата угловой скорости тѣла на кратчайшее расстояние точки отъ оси и направлено отъ точки по перпендикуляру къ оси:  $\ddot{c} = \tau \cdot \varphi'^2$ .

На основаніи формулъ (14), (15) и (16) заключаемъ, что ускореніе ( $\ddot{u}$ ) какой либо точки тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, есть геометрическая сумма двухъ ускореній: вращательнаго и центростремительнаго; поэтому ускореніе  $\ddot{u}$  изображается диагональю параллелограмма, построеннаго на ускореніяхъ  $\ddot{u}'$  и  $\ddot{c}$ :

$$\ddot{u} = \tau \sqrt{\varphi''^2 + \varphi'^4}.$$

## § 6. Движеніе твердаго тѣла, параллельное неподвижной плоскости.

Движеніе твердаго тѣла называемое параллельнымъ неподвижной плоскости, если точки тѣла, лежація въ нѣкоторый моментъ въ одной неподвижной плоскости, при движеніи тѣла остаются въ этой плоскости.

Очевидно, что тогда точки тѣла, лежація въ какой угодно плоскости, параллельной неподвижной, остаются въ ней при движеніи тѣла.

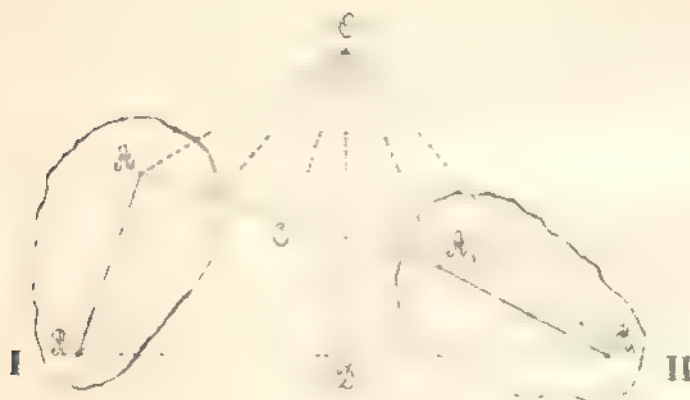
Движеніе всѣхъ точекъ тѣла, лежащихъ на одной прямой, перпендикулярной къ неподвижной плоскости, будетъ одновременное.

Поэтому для изученія движенія тѣла достаточно рассмотреть движеніе той плоской неизмѣняемой фигуры, которая получается при пересѣченіи тѣла неподвижною плоскостью.

твoрeнiя. Всякое положеніе неизмѣняемой плоской фигуры, дви-

жущейся въ ея плоскости, можетъ быть получено изъ какого угодно другого ея положенія посредствомъ вращенія вокругъ некоторой точки, если только оно не получается посредствомъ поступательнаго движенія.

**Доказательство.** Положеніе плоской фигуры будетъ опредѣлено, если извѣстно положеніе некоторой прямой, принадлежащей этой фигурѣ.



Пусть  $AB$  и  $A_1B_1$  (черт. 105) будутъ два положенія одной и той же прямой, принадлежащей фигурѣ при I и II положеніяхъ. Проведемъ прямыя  $AA_1$  и  $BB_1$  и

Чертежъ 105.

въ серединахъ ихъ  $C$  и  $D$  возстановимъ перпендикуляры, — пусть они пересекаются въ точкѣ  $O$ . Соединимъ точку  $O$  съ точками  $A, B, A_1, B_1$ ; тогда

$$OA = OA_1,$$

$$OB = OB_1.$$

Изъ равенства треугольниковъ  $AOB$  и  $A_1OB_1$  слѣдуетъ, что

$$\angle AOB = \angle A_1OB_1;$$

а потому

$$\angle AOB + \angle BOA_1 = \angle A_1OB_1 + \angle B_1OA_1,$$

или

$$\angle AOA_1 = \angle BOB_1 = \varphi.$$

Отсюда заключаемъ, что при вращеніи фигуры вокругъ точки

на угол  $\alpha$ , точка  $C$  придетъ въ  $C'$ , а точка  $A$  въ  $A'$ ; следовательно, изъ положенія I фигура перейдетъ въ положеніе II\*).

Доказанная теорема имѣетъ мѣсто и тогда, когда положенія I и II плоской фигуры суть положенія *безконечно близкія*, и мы приходимъ къ слѣдующему заключенію: *безконечно малое перемѣщеніе плоской фигуры въ ея плоскости можетъ быть получено вращеніемъ ея на безконечно малый уголъ вокругъ некоторой точки.*

Эта точка въ различные моменты времени занимаетъ разныя положенія и потому называется "мгновеннымъ центромъ".

При своемъ движеніи мгновенный центръ вычерчиваетъ на неподвижной плоскости некоторую кривую, которая называется "неподвижной центроидой"; другую кривую онъ вычерчиваетъ на плоскости движущейся вѣстѣ съ фигурой, — эта кривая называется "подвижной центроидой" (чертежъ 106).

Чертежъ 106.

Центроиды въ каждый моментъ имѣютъ общую точку касанія, которая служитъ мгновеннымъ центромъ для этого момента, и при движеніи тѣла подвижная центроида катится безъ скольженія по центроидѣ неподвижной.

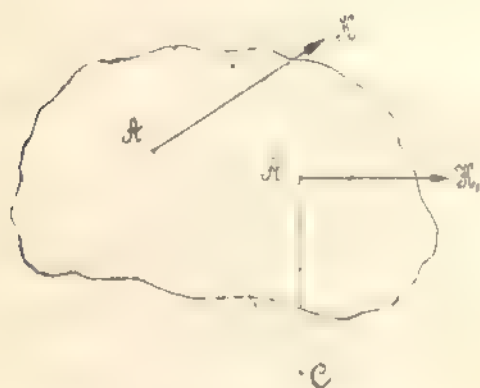
Центроиды въ каждый моментъ имѣютъ общую точку касанія, которая служитъ мгновеннымъ центромъ для этого момента, и при движеніи тѣла подвижная центроида катится безъ скольженія по центроидѣ неподвижной.

Скорости точекъ плоской фигуры въ каждый моментъ суть вращательныя скорости вокругъ мгновеннаго центра, слѣдовательно,

\*) ПРИМѢЧАНІЯ. Поступательное движеніе плоской фигуры можно разсматривать какъ вращеніе вокругъ безконечно удаленной точки, и тогда высказанное въ теоремѣ ограниченіе совпадаетъ.

перпендикулярна къ линіямъ, соединяющимъ ихъ съ мгновеннымъ центромъ.

Поэтому, чтобы построить мгновенный центръ для данного момента, достаточно знать направленія скоростей въ этотъ моментъ двухъ точекъ ( $A$  и  $B$ ) фигуры (черт. 107): точка пересѣченія ( $C$ ) перпендикуляровъ, возстановленныхъ въ этихъ точкахъ къ направленіямъ ихъ скоростей ( $v_A$  и  $v_B$ ) и будетъ мгновенный центръ для данного момента.



Чертежъ 107.

Ускоренія точекъ плоской фигуры, движущейся въ ея плоскости, опредѣляются какъ ускоренія точекъ во вращательномъ движеніи фигуры вокругъ мгновеннаго центра.

Выше было уже указано, что при движе-

ніи твердаго тѣла, параллельномъ неподвижной плоскости, всѣ точки, лежація на одномъ перпендикулярѣ къ этой плоскости, движутся совершенно одинаково, слѣдовательно, въ тѣлѣ въ каждый моментъ существуетъ безчисленное множество точекъ, скорость

которыхъ равна нулю; эти точки лежатъ на перпендикулярѣ, возстановленномъ къ плоскости фигуры въ мгновенномъ центрѣ; тѣмъ тѣлѣ существуетъ, такимъ образомъ, мгновенная ось.



Чертежъ 108.

Когда мгновенный центръ описываетъ центроиду, мгновенная ось описываетъ цилиндръ, кото-

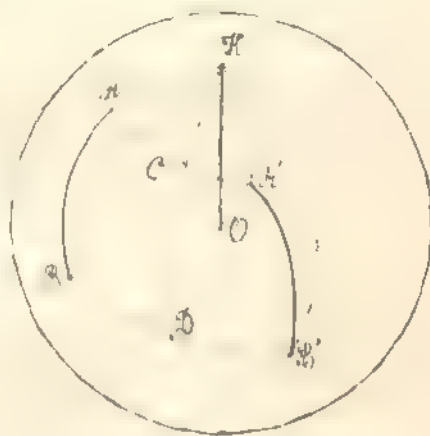
не разываются осями (черт.108); одинъ изъ нихъ - "под-  
вижной осью" - катится безъ скольженія по другому - "не-  
подвижной осью".

### § 7. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки.

Когда тѣло имѣетъ неподвижную точку  $O$ , то положеніе тѣла  
легко будетъ определено, если будемъ знать положеніе двухъ  
любыхъ нѣбудь точекъ  $A$  и  $B$ , не лежащихъ на одной прямой съ  
точкою  $O$  (черт.109).



Чертежъ 109.



Чертежъ 110.

**ТЕОРЕМА.** При вращеніи твердаго тѣла вокругъ неподвижной  
точки всякое положеніе тѣла можетъ быть получено изъ какого-  
угодно другаго положенія посредствомъ вращенія вокругъ неко-  
торой оси, проходящей черезъ неподвижную точку.

Опишемъ изъ неподвижной точки  $O$ , какъ центра, поверхность  
шара, и возьмемъ на ней какую-либо дугу большого круга, при-  
надлежащую тѣлу (черт.110); при перемѣщеніи тѣла эта дуга пе-  
ремѣщается, оставаясь на поверхности шара; пусть  $A, B$  и  $A', B'$   
будутъ ея положенія при первомъ и второмъ положеніяхъ тѣла;  
для доказательства теоремы достаточно показать, что  $A, B$  при-  
ходитъ въ  $A', B'$  при поворотѣ тѣла на нѣкоторый уголъ вокругъ  
нѣкоторой оси, проходящей черезъ точку  $O$ .



Доказательство аналогично тому, которое указано выше для случая движения плоской неизменяемой фигуры въ ея плоскости (см. стр. 148) съ той разницею, что здѣсь, вмѣсто прямыхъ, проводятся дуги большихъ круговъ:

$$\sphericalangle AC = \sphericalangle CA';$$

$$\sphericalangle BD = \sphericalangle DB';$$

$$\sphericalangle CA \perp \sphericalangle AA';$$

$$\sphericalangle BA \perp \sphericalangle BB'.$$

Очевидно

$$\sphericalangle A\mathcal{K} = \sphericalangle A'\mathcal{K},$$

"

$$\sphericalangle B\mathcal{K} = \sphericalangle B'\mathcal{K};$$

кроме того,

$$\sphericalangle A'B' = \sphericalangle A'B.$$

слѣдовательно,

$$\triangle A'B\mathcal{K} = \triangle A'B'\mathcal{K}$$

откуда

$$\angle A\mathcal{K}\mathcal{K}' = \angle A'\mathcal{K}\mathcal{K}';$$

прибавляя по углу  $\mathcal{K}\mathcal{K}\mathcal{K}'$ , получимъ:

$$\angle B\mathcal{K}\mathcal{K}' = \angle A\mathcal{K}\mathcal{K}' - \varphi.$$

Такимъ образомъ, когда тѣло повернемъ вскругу прямой  $OK$  на уголъ  $\varphi$ , т.е. такъ, чтобы точка  $A$  перешла въ  $A'$ , то точка  $B$  перейдетъ въ  $B'$ , и дуга  $AB$  займетъ положеніе  $A'B'$ .

Слѣствие. Теорема справедлива, какъ бы второе положеніе тѣла ни было близко къ положенію первому, слѣдовательно, какъ бы мало ни было рассматриваемое перемѣщеніе; поэтому теорема справедлива для безконечно малата перемѣщенія: безконечно малое перемѣщеніе тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, можетъ быть получено вращеніемъ тѣла на

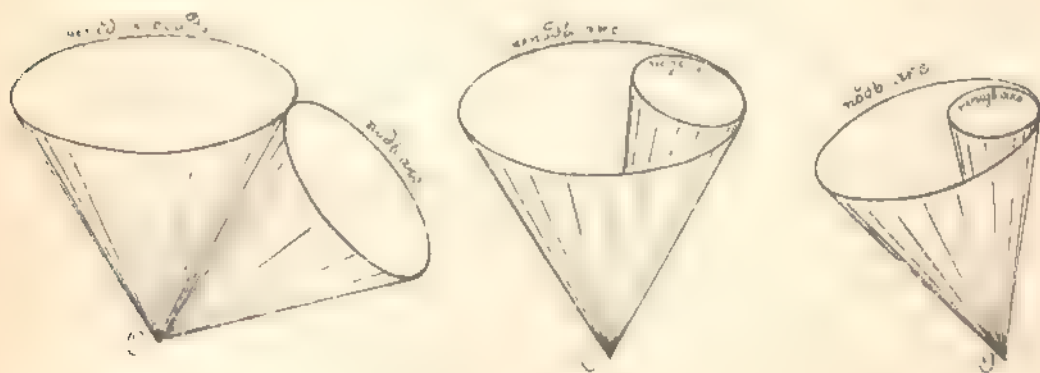
бесконечно малый уголъ вокругъ некоторой оси.

Эта ось проходить постоянно черезъ неподвижную точку, но въ различные моменты времени имѣетъ разныя направленія, и потому называется *мгновенной осью*.

Мгновенную ось для какого либо момента мы найдемъ, если, кромѣ закрѣпленной точки, будетъ известна другая точка, скорость которой равна нулю.

Скорости и ускоренія точекъ тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной точки, въ каждый моментъ мы можемъ опредѣлить такъ же, какъ при вращеніи около неподвижной оси, принимая за ось вращенія мгновенную ось.

Мгновенная ось, перемѣщаясь, вообще говоря, непрерывно съ теченіемъ времени, описываетъ двѣ коническихъ поверхности, одну въ самомъ движущемся тѣлѣ, другую въ пространствѣ: первая поверхность называется *подвижнымъ аксоидомъ*, вторая *неподвижнымъ аксоидомъ* (черт. 111).



Чертежъ 111.

Въ каждый моментъ оба аксоида имѣютъ общую производящую, которая и служитъ мгновенной осью для этого момента.

При вращеніи тѣла около неподвижной точки подвижной аксоидъ катится безъ скольженія по аксоиду неподвижному.



К И Н Е Т И К А .

( О с н о в н ы е п о н я т и я ).



### ВВЕДЕНІЕ.

*Кинетика*, или, какъ ее нерѣдко называютъ, *динамика*, изучаетъ движеніе въ связи съ тѣми причинами, которыми оно обусловливается.

Одно изъ основныхъ понятій кинетики представляетъ понятіе о матеріальной точкѣ.

*Матеріальная точка* есть тѣло, размѣрами котораго пренебрегаемъ.

Такое пренебреженіе мы можемъ сдѣлать, наприимѣръ, тогда, когда тѣло движется *поступательно*.

Положеніе матеріальной точки опредѣляется, подобно точкѣ математической, тремя координатами, а потому матеріальную точку можно разсматривать, какъ точку математическую, въ которой сосредоточено все вещество тѣла.

Понятіе о матеріальной точкѣ введено въ кинетику для упрощенія различныхъ вопросовъ о движеніи тѣла, такъ какъ, пренебрегая размѣрами тѣла, мы пренебрегаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ и его формою, и распределеніемъ въ немъ вещества.

Матеріальная точка называется *свободною*, когда въ занимаемомъ ею положеніи она можетъ имѣть скорость какой угодно величины и какого угодно направленія; въ противномъ случаѣ точка называется *несвободною*.



## ГЛАВА I.

### ПРИНЦИПЫ КИНЕТИКИ И ГЛАВНЫЯ ЗАДАЧИ КИНЕТИКИ ТОЧКИ.

#### § 1. Принципы кинетики.

При изложеніи кинетики мы будемъ основываться на трехъ принципахъ, устанавливающихъ связь между движеніемъ и тѣми причинами, которыми оно вызывается; — эти принципы принимаютъся нами безъ доказательствъ.

*Первый принципъ* (принципъ инерціи, первый законъ Ньютона)\*).

Свободной матеріальной точкѣ свойственно сохранять безъ измѣненія величину и направленіе своей скорости.

Изъ этого принципа мы выводимъ прежде всего два слѣдствія.

*Слѣдствіе I.* Если свободная матеріальная точка находится въ покой, т.е. имѣетъ скорость, равную нулю, то ей свойственно оставаться въ покой.

*Слѣдствіе II.* Если свободная матеріальная точка въ данный моментъ находится въ движеніи, то ей свойственно далѣе дви-

гаться прямолинейно и равномерно съ тою скоростью, которую она имѣла въ данный моментъ.



Чертежъ 112.

На черт. 112 отрезокъ  $CA$  изображаетъ скорость  $C$  точки  $C$  въ некоторый моментъ  $t$ , а линія  $CA$  ту прямую, которую должна бы была опи-

\*) "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" 1687.

сать точка послѣ этого момента, двигаясь съ постоянною скоростью на основаніи слѣдствія II.

Причины, обусловливающія такое состояніе свободной матеріальной точки, которое не объясняется принципомъ инерціи, называются *силами*.

Сила, слѣдовательно, есть та причина, которая или покоящуюся точку приводитъ въ движеніе, или точку движущуюся заставляеть двигаться или по прямой, но неравномѣрно, или по кривой; короче говоря, *сила есть та причина, которая производитъ измѣненіе скорости точки, т. е. сообщаетъ точке ускореніе*.

Силы по своему происхожденію бываютъ весьма разнообразны, какъ-то: сила тяжести, сила всемірнаго тяготѣнія, силы сопротивленія среды, силы упругости, силы электрическія, магнитныя и пр.

Не интересуясь ни происхожденіемъ, ни характеромъ силъ, механика рассматриваетъ только три свойства силы: точку приложенія, направленіе и величину.

*Второй принципъ. Сила, приложенная къ свободной матеріальной точке, имѣетъ направленіе сообщаемого ей ускоренія и по величинѣ пропорціональна этому ускоренію.*

Если силу, приложенную къ матеріальной точкѣ, обозначимъ черезъ  $F$ , ускореніе, сообщаемое ей, черезъ  $\ddot{u}$ , то  $F$  имѣетъ одинаковое направленіе съ  $\ddot{u}$ , и, кромѣ того, по величинѣ:

$$F = m \ddot{u}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ  $m$  есть коэффициентъ пропорціональности; этотъ коэффициентъ мы называемъ *массою* матеріальной точки.

Для уясненія этого новаго понятія возьмемъ простѣйшій случай, именно тотъ, когда на свободную матеріальную точку дѣйствуетъ только сила тяжести.

Какъ извѣстно, ускореніе, сообщаемое силою тяжести, направлено по вертикали внизъ и равно

$$g = 981 \frac{\text{см.}}{\text{сек.}^2}.$$

Если возьмемъ двѣ матеріальныя точки, массы которыхъ будутъ  $m_1$  и  $m_2$ , а соответственные вѣса въ данномъ мѣстѣ земной поверхности  $p_1$  и  $p_2$ , то въ силу уравненія (1) имѣемъ:

$$p_1 = m_1 g.$$

$$p_2 = m_2 g.$$

откуда

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2};$$

слѣдовательно, массы матеріальныхъ точекъ пропорціональны ихъ вѣсамъ; поэтому, если вѣса двухъ матеріальныхъ точекъ равны, то мы можемъ утверждать, что и массы ихъ равны.

Такимъ образомъ, мы имѣемъ возможность измѣрять массы.

Въ той системѣ, въ которой за единицу длины принимаютъ одинъ сантиметръ, а за единицу времени одну секунду, — за единицу массы принимаютъ массу одного грамма, такъ что, если какое либо тѣло вѣситъ  $n$  граммовъ, то масса этого тѣла выражается числомъ  $n$ .

Итакъ, мы имѣемъ теперь всѣ эти три основныхъ единицы: единицу массы ( $M$ ), единицу длины ( $L$ ) и единицу времени ( $T$ ).

Наиболѣе часто употребляется система единицъ: граммъ, сантиметръ, секунда; эта система называется для краткости "система CGS".

Единица силы будетъ единица производная и получится, когда мы единицу массы умножимъ на единицу ускоренія:

$$\text{ед. силы} = (\text{ед. массы}) \times (\text{ед. ускор.}) =$$

$$= \frac{(\text{ед. массы}) \times (\text{ед. длины})}{(\text{ед. врем.})^2} = MLT^{-2}$$

Единицей силы вообще называется такая сила, которая материальной точке, имѣющей массу, равную единицѣ, сообщитъ ускореніе, равное единицѣ.

Въ системѣ CGS сила, равная единицѣ, будетъ такая, которая матеріальной точкѣ, масса которой равна одному грамму, сообщитъ ускореніе, равное одному  $\frac{\text{сантм.}}{(\text{сек})^2}$ ; — эта сила называется дина.

Дина — сила весьма малая; она равна  $\frac{1}{98}$  нѣса одного грамма\*).

Изъ формулы (1) слѣдуетъ:

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Такъ какъ при этомъ ускореніе  $\vec{v}$  и сила  $\vec{F}$  имѣютъ одинаковое направленіе, то проекція ускоренія  $\vec{v}$  на какую угодно ось равна раздѣленной на массу  $m$  проекціи силы  $\vec{F}$  на ту же ось. Проектируя ускореніе  $\vec{v}$  и силу  $\vec{F}$  на координатныя оси, находимъ:

$$\vec{v} \cos(\vec{v}, X) = \frac{1}{m} F \cos(F, X),$$

$$\vec{v} \cos(\vec{v}, Y) = \frac{1}{m} F \cos(F, Y),$$

$$\vec{v} \cos(\vec{v}, Z) = \frac{1}{m} F \cos(F, Z);$$

откуда, по умноженіи на массу  $m$ , получимъ:

\*) Если дано статическое выраженіе величины силы въ единицахъ нѣса, то въ кинетикѣ это число должно быть умножено на величину ускоренія силы тяжести.

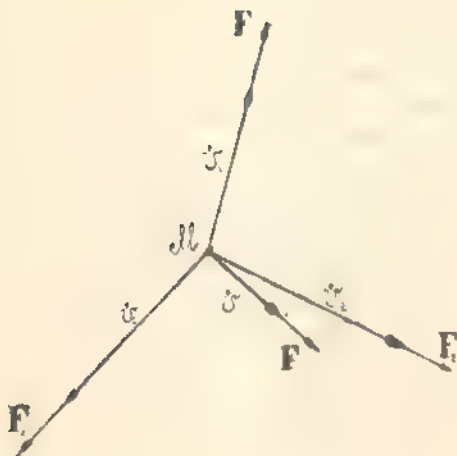
$$\left. \begin{aligned} m \dot{v} \cos(\dot{v}, X) &= F \cos(F, X), \\ m \dot{v} \cos(\dot{v}, Y) &= F \cos(F, Y), \\ m \dot{v} \cos(\dot{v}, Z) &= F \cos(F, Z); \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

Обозначая координаты матеріальной точки через  $x, y, z$ , а проекціи силы  $F$ , къ ней приложенной, на координатныя оси через  $X, Y, Z$ , получимъ аналитическое выраженіе принципа второго въ видѣ слѣдующихъ, вообще говоря, трехъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z; \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

или

$$\begin{aligned} m x'' &= X, \\ m y'' &= Y, \\ m z'' &= Z. \end{aligned}$$



Чертежъ 118.

### Третій принципъ.

При одновременномъ дѣйствіи на свободную матеріальную точку нѣсколькихъ силъ, ускореніе, получаемое точкой, равно по величинѣ и направленію геометрической суммѣ ихъ ускореній, которая точка получаетъ

при дѣйствіи каждой изъ этихъ силъ въ отдельности.

Пусть  $\vec{u}$  будетъ ускореніе, которое получаетъ точка, когда къ ней приложена только одна сила  $\vec{F}_1$ ;  $\vec{u}_1$  ускореніе при дѣйствіи одной силы  $\vec{F}_1$ ; ...  $\vec{u}_n$  ускореніе при дѣйствіи одной силы  $\vec{F}_n$ ; тогда при одновременномъ приложеніи къ точкѣ этихъ силъ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  (черт. 113) точка получитъ такое ускореніе  $\vec{u}$ , что

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \dots + \vec{u}_n. \quad *)$$

Отсюда по умноженіи ускореній на число, выражающее массу точки, получимъ:

$$m\vec{u} = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 + m\vec{u}_3 + \dots + m\vec{u}_n.$$

Отрѣзокъ, имѣющій величину  $m\vec{u}$  и направленіе ускоренія  $\vec{u}$ , изображаетъ некоторую силу  $\vec{F}$ , а отрѣзки, входящіе геометрическими слагаемыми въ правой части полученнаго равенства, изображаютъ данныя силы:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ ; поэтому мы имѣемъ:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n.$$

Сила  $\vec{F}$  равна геометрической суммѣ силъ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , слѣдовательно, одновременное дѣйствіе на точку данныхъ силъ можно, какъ и въ статикѣ, замѣнить дѣйствіемъ одной силы — ихъ равнодѣйствующей.

Если проекціи на координатныя оси силы  $\vec{F}$  обозначимъ черезъ  $X, Y, Z$ , проекціи силы  $\vec{F}_1$  черезъ  $X_1, Y_1, Z_1$  и вообще проекціи силы  $\vec{F}_i$  черезъ  $X_i, Y_i, Z_i$ , то проекціи равнодѣйствующей будутъ:

$$X = \sum_{i=1}^n X_i,$$

---

\*) Черта наверху показываетъ на то, что сумма геометрическая.



$$\left. \begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i, \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

Замѣняя данныя силы ихъ равнодѣйствующей, мы получимъ случай, къ которому относится второй принципъ\*).

## § 2. Главныя задачи кинетики точки.

Съ помощью уравненій (2) или (3) мы можемъ рѣшать слѣдующія два задачи:

I. Дано движеніе матеріальной точки; опредѣлить силу, подъ вліяніемъ которой это движеніе совершается.

II. Дана сила, приложенная къ точкѣ; опредѣлить движеніе, которое подъ вліяніемъ этой силы точка совершаетъ.

Первая задача рѣшается легко.

Движеніе точки опредѣляется тремя уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

гдѣ  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  суть данныя функціи отъ времени  $t$ .

Дифференцируя эти функціи два раза по  $t$ , мы найдемъ проекціи ускоренія точки на координатныя оси:

$$x'' = f_x''(t),$$

---

\*) ПРИМѢЧАНІЯ. Къ этимъ тремъ принципамъ можетъ быть присоединенъ четвертый принципъ, установленный въ статикѣ: всякому дѣйствию соответствуетъ равное и противоположно направленное противодействие.

$$y'' = f_2''(\tau),$$

$$z'' = f_3''(\tau).$$

На основаніи уравненій (3) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= m \cdot f_1''(\tau), \\ Y &= m \cdot f_2''(\tau), \\ Z &= m \cdot f_3''(\tau). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

Отсюда найдемъ величину и направленіе искомой силы.

Когда точка движется въ одной плоскости, тогда принимая ее за плоскость  $CO_2'$ , мы силу опредѣлимъ съ помощью двухъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} X &= m \cdot f_1''(\tau), \\ Y &= m \cdot f_2''(\tau), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6')$$

такъ какъ будетъ  $Z=0$ .

Въ случаѣ прямолинейнаго движенія точки, принимая траекторію точки за ось  $CO_1$ , получимъ одно уравненіе:

$$X = m \cdot f_1''(\tau), \dots\dots\dots (6'')$$

такъ какъ двѣ другія проекціи  $Y=0$ ,  $Z=0$ .

Въ формулахъ (6), (6'), (6'') проекціи силы выражаются въ функціяхъ времени, но изъ уравненій (5) время  $\tau$  мы можемъ выразить въ функціи отъ любой координаты, а изъ уравненій, которыя получаются дифференцированіемъ этихъ уравненій,

$$x' = f_1'(\tau),$$

$$y' = f_2'(\tau),$$

$$z' = f_3'(\tau),$$

мы можемъ выразить  $\tau$  въ функціи отъ проекцій  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  скорости точки; поэтому проекціи силы, а слѣдовательно, и си-

ду, мы можем выразить через время  $t$ , или через координаты  $x, y, z$ , или через проекции скорости  $v_x, v_y, v_z$ ; таким образом, во самом общем виде проекции силы выражаются как некоторая функции от  $t, x, y, z, v_x, v_y, v_z$ .

Во частномъ случаѣ проекціи силы могутъ быть величины постоянныя.

**Примѣръ 1.** Найдемъ силу, при дѣйствіи которой точка массы  $m$  совершаетъ по оси  $OX$  колебательное движеніе:

$$x = a \cos kt.$$

Находимъ:

$$x' = -ak \sin kt,$$

$$x'' = -ak^2 \cos kt;$$

поэтому сила  $F$  будетъ:

$$F = -m a k^2 \cos kt$$

или

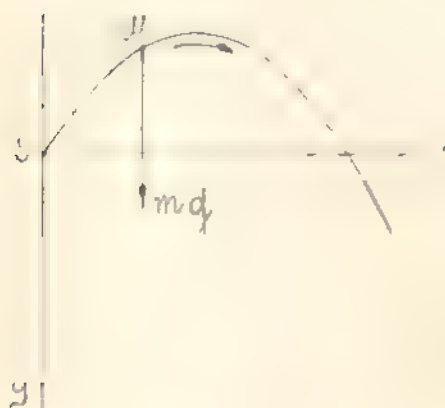
$$F = -m k^2 x.$$

или

$$F = -m a k^2 \cos kt = x''.$$

Выбираемъ самое простое выраженіе:

$$F = -m k^2 x,$$



Черт. 114.

которое показываетъ, что дѣйствующая сила есть сила притяженія къ началу координатъ, пропорціональная разстоянію движущейся точки отъ начала координатъ.

**Примѣръ 2.** Найдемъ

силу, при дѣйствіи которой точка массы  $m$  описываетъ параболу въ вертикальной плоскости (черт. 114), причемъ координаты ея

выражаются формулами:

$$x = at,$$

$$y = \frac{1}{2}gt + \frac{1}{2}gt^2.$$

если ось  $(x)$  горизонтальна, а ось  $(y)$  направлена по вертикали вниз.

Находит:

$$x'' = 0.$$

$$y'' = g.$$

следовательно:

$$X = 0,$$

$$Y = mg.$$

Такимъ образомъ искомая сила имѣетъ постоянную величину  $mg$  и направлена по вертикали внизъ.

Рѣшеніе второй задачи, т.е. опредѣленіе движенія по данной силѣ, вообще говоря, несравненно труднѣе; — зная проекціи силы, какъ функціи въ общемъ случаѣ, отъ переменныхъ  $t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ , мы должны съ помощью уравненій (3) найти координаты точки  $x, y$  и  $z$ , какъ функціи времени  $t$ ; такъ какъ уравненія (3) всегда содержатъ вторыя производныя отъ координатъ по времени, а иногда и ихъ первыя производныя по времени, то они будутъ, такъ называемыя, дифференціальныя уравненія; эти уравненія нужно интегрировать, что представляетъ большія затрудненія.

Вторая задача будетъ подробно рассмотрѣна во второй части курса Теоретической Механики.

## ГЛАВА II.

### ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.

#### § 1. Работа силы и живая сила матеріальной точки.

Пусть сила  $P$ , постоянная по величинѣ и направленію, на-  
примѣръ, сила тяжести, приложена къ матеріальной точкѣ, и точ-  
ка проходитъ по направленію этой силы нѣкоторый путь  $h$ ; тог-  
да произведеніе силы на длину пройденнаго точкою пути:  $P h$ ,  
называется работой силы  $P$  на пути  $h$ .

Единица работы: (ед. силы)  $\times$  (ед. дл.) =  $MLT^2$ . Въ систе-  
мѣ CGS единица работы будетъ работа силы, равной одной динѣ  
на протяженіе одного сантиметра по направленію силы; эта еди-  
ница работы называется эргъ.

Такъ какъ эргъ единица очень малая, то часто употребляютъ  
другія единицы работы:

Килограммометръ =  $981 \cdot 10^5$  эрговъ,

пудофутъ = 5 килограммометрамъ\*).

и т. д.



Чертежъ 115.

Если точка движется  
подъ нѣкоторымъ угломъ къ  
направленію приложенной  
къ ней постоянной силы, то  
работа силы на протяженіи  
пути  $h$  точки (черт. 115)  
есть произведеніе силы на

\*) ПРИМѢЧАНІЕ. Работа въ теченіе нѣкакогого опредѣленна-  
го промежутка времени, напр., въ одну секунду, наз. "мощностью";  
единица мощности — лошадиная сила = 15 пудофутовъ въ секунду.

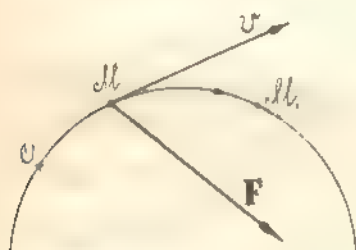
длину пути  $h$  и на косинусъ угла между направлениемъ силы и скоростью точки:

$$P \cdot h \cdot \cos(P, v).$$

Работа силы будетъ положительною, если уголъ  $(P, v)$  острый, отрицательною, если уголъ  $(P, v)$  тупой, и равенъ нулю, если уголъ  $(P, v)$  прямой.

Для того, чтобы установить понятие о работѣ въ общемъ случаѣ, т. е. въ случаѣ переменной силы и криволинейнаго движенія точки, необходимо ввести понятие объ элементарной работѣ.

Каковы бы ни были движеніе точки и сила, къ ней приложенная, безконечно малое перемѣщеніе точки мы можемъ разсматривать, какъ прямолинейное, а направление и величину силы при безконечно маломъ перемѣщеніи точки можемъ считать постоянными\*).



Чертежъ 116.

Пусть  $s$  будетъ дуга траекторіи точки  $M$ , отсчитываемая отъ произвольно выбранной неподвижной точки  $U$  (чертежъ 116), тогда элементъ пути:

$$M M_1 = |ds|,$$

гдѣ разсматривается только абсолютная величина дифференціала  $ds$ , такъ что

$$|ds| = v dt.$$

Элементарной работою силы, приложенной къ матеріальной точкѣ, называется произведеніе величины силы на элементъ пути и на косинусъ угла между направлениемъ силы и направлениемъ

\*) Допускаемая при этомъ погрѣшность въ выраженіи соответствующей работы будетъ безконечно малая величина второго порядка.



скорости:

$$F|ds|\cos(F, v);$$

элементарная работа силы будет положительною, если угол  $(F, v)$  острый, отрицательною, если угол  $(F, v)$  тупой, и равен нулю, если угол  $(F, v)$  прямой.

Работа силы  $F$  на некоторой конечной части пути  $M_1 M_2$  (черт. 117) точки есть предѣлъ, къ которому приближается сумма элементарныхъ работъ силы  $F$  на этой части пути, при уменьшеніи соотвѣствующихъ элементовъ пути до нуля, т. е.

$$\sum F|ds|\cos(F, v);$$

этотъ предѣлъ есть интегралъ

$$\int_{M_1}^{M_2} F \cos(F, v) |ds|,$$

причемъ величина, стоящая подъ знакомъ интеграла, предполагается

выраженной черезъ одну

переменную величину: черезъ

время  $t$ , или черезъ одну

изъ координатъ, напримѣръ,

черезъ  $x$ , или черезъ дугу

$s^*$ ; предѣлы интегрирования

будутъ значенія этой пе-

ременной, соотвѣствующія

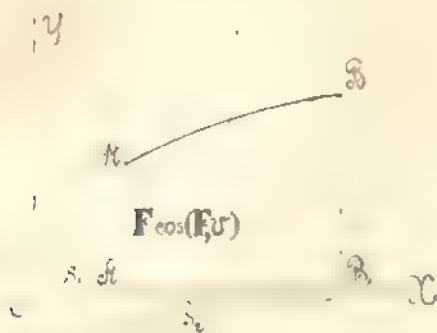


Чертежъ 117.

положеніямъ точки  $M_1$  и  $M_2$ ; въ первомъ случаѣ  $t_1$  и  $t_2$ , во второмъ  $x_1$  и  $x_2$ , въ третьемъ  $s_1$  и  $s_2$ .

Замѣтимъ, что интегралъ  $\int_{M_1}^{M_2} F \cos(F, v) |ds|$  можемъ изобразить некоторой площадью, напримѣръ, при  $\cos(F, v) \geq 0$ , пло-

\*) При двѣнадцати точкахъ координаты ея суть некоторыя функции отъ времени: поэтому ея три величины: сила  $F$ ,  $\cos(F, v)$  и дуга  $s$  такъ же некоторыя функции отъ времени  $t$ : но, вѣдь отъ  $t$ , можно ввести какую либо другую переменную величину, связанную съ  $t$ , напримѣръ,  $x$ ,  $s$  и т. д.



Чертежъ 118.

щадь  $A, ABB$ , изображенной на чертежѣ 118. Линію  $AB$  строимъ по точкамъ, откладывая по оси  $OX$  значенія переменной  $s$ , а по оси  $OY$  соответствующія величины проекціи силъ на направление скорости:  $F \cos(\phi)$ .

**ТЕОРЕМА 1.** Элементарная работа равнодѣйствующей нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной матеріальной точкѣ, равна суммѣ работъ составляющихъ силъ на томъ же элементѣ пути.

Если  $F$  есть равнодѣйствующая силъ:  $F, F_1, \dots, F_n$ , то

$$F \cos(\phi) = F \cos(\phi) + F_1 \cos(\phi_1) + \dots + F_n \cos(\phi_n).$$

откуда по умноженіи на элементъ дуги  $|ds|$  получаемъ:

$$F \cos(\phi) |ds| = F \cos(\phi) |ds| + F_1 \cos(\phi_1) |ds| + \dots + F_n \cos(\phi_n) |ds|. \quad (1)$$

**ТЕОРЕМА 2.** Работа равнодѣйствующей нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной матеріальной точкѣ, на нѣкоторой конечной части пути равна суммѣ работъ составляющихъ силъ на той же части пути.

Въ самомъ дѣлѣ, проинтегрировавъ обѣ части уравненія (1), получимъ:

$$\int_a^b F \cos(\phi) |ds| = \int_a^b F \cos(\phi) |ds| + \int_a^b F_1 \cos(\phi_1) |ds| + \dots + \int_a^b F_n \cos(\phi_n) |ds|.$$

Это равенство и выражаетъ теорему 2-ую.

Найдемъ выраженіе элементарной работы черезъ проекціи силъ:  $X, Y, Z$  на оси декартовыхъ координатъ и координаты точки:  $x, y, z$ , — получимъ:

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

поэтому

$$F \cos(F, v) |ds| = F \cdot v \cdot \cos(F, v) \cdot dt ;$$

но, по известной формулѣ для косинуса угла между двумя направ-  
леніями, имѣемъ:

$$F \cdot v \cos(F, v) = X x' + Y y' + Z z',$$

слѣдовательно:

$$F \cos(F, v) \cdot ds = (X x' + Y y' + Z z') \cdot dt = X dx + Y dy + Z dz .$$

Такимъ образомъ, элементарная работа силы  $F$  равна

$$X dx + Y dy + Z dz .$$

Отсюда слѣдуетъ, что работа силы на нѣкоторой конечной  
части пути  $M_1 M_2$  можетъ быть представлена въ видѣ интеграла:

$$\int_{M_1}^{M_2} (X dx + Y dy + Z dz) ,$$

предполагая, что всѣ величины подъ знакомъ интеграла выражены  
черезъ одну переменную величину, наприимѣръ, черезъ  $\zeta$ , или че-  
резъ  $x$ , или черезъ  $s$  и т.д.

----- " -----

*Живая сила матеріальной точки или кинетическою энергіей  
матеріальной точки называется половина произведенія массы точ-  
ки на квадратъ ея скорости:  $m \frac{v^2}{2}$ .*

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что живая сила измѣряется  
тѣми же единицами, что и работа силы:  $MLT^{-1}$ ; въ системѣ  
CGS единица живой силы будетъ

$$\frac{\text{граммъ} \cdot (\text{сант.})^2}{(\text{сек.})^2} .$$

## § 2. Законъ живой силы.

Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія точки:

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z :$$

умножимъ правыя части этихъ уравненій соответственно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , а лѣвыя на равныя имъ величины  $x'dt$ ,  $y'dt$ ,  $z'dt$ , и сложимъ, тогда получимъ:

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})dt = Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots \dots (2)$$

но

$$\begin{aligned} m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})dt &= m(\dot{x}d\dot{x} + \dot{y}d\dot{y} + \dot{z}d\dot{z}) = \\ &= d\left[\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = d\frac{mv^2}{2}; \end{aligned}$$

слѣдовательно, уравненіе (2) представится въ видѣ:

$$d\frac{mv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz; \dots \dots \dots (3)$$

или, на основаніи предыдущаго параграфа:

$$d\frac{mv^2}{2} = F_{\text{жс}}(F, \sigma) ds \dots \dots \dots (3)$$

Уравненіе (3) или (3.) выражаетъ законъ живой силы въ случаѣ матеріальной точки:

безконечно малое приращеніе живой силы матеріальной точки, получаемое ею на протяженіи элемента пути, равно элементарной работѣ равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на томъ же элементѣ пути.

Пусть  $m_1$  и  $m_2$  будутъ крайнія положенія матеріальной точки на нѣкоторой конечной части ея пути, а  $v_1$  и  $v_2$  соотвѣтствующія скорости точки; возьмемъ интегралы отъ обѣихъ частей уравненія (3) въ предѣлахъ отъ  $m_1$  до  $m_2$ ; тогда получимъ:

$$m \frac{v_z^2}{2} - m \frac{v_z^2}{2} = \int_{M_1}^{M_2} (X dx + Y dy + Z dz), \dots\dots\dots (4)$$

или

$$\frac{m v_z^2}{2} - \frac{m v_z^2}{2} = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds(\mathbf{F}, \mathbf{v}) \cdot |ds| \dots\dots\dots (4,)$$

Уравненіе (4) или (4,) даетъ другое выраженіе закона живой силы:

приращеніе живой силы матеріальной точки, получаемое ею на некоторой конечной части пути, равно работѣ на этой части пути равнодійствующихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ.

Уравненія (4) или (4,) позволяютъ намъ опредѣлить работу силы, приложенной къ точкѣ, если даны: масса точки и скорость ея какъ въ началѣ, такъ и въ концѣ этого пути.

Съ помощью уравненій (4) или (4,) можемъ также опредѣлить скорость точки въ какомъ либо положеніи, если извѣстны ея масса и скорость въ какомъ либо другомъ положеніи и затѣмъ работа приложенной силы на всемъ пути отъ одного изъ этихъ положеній до другого.

Примѣнимъ уравненія (3) и (4) къ случаю силы тяжести.

Вертикальную плоскость, въ которой точка движется, примемъ за плоскость  $xy$  и ось  $z$  направимъ по вертикали внизъ; тогда проекція силы тяжести будутъ:

$$X=0, Y=mg, Z=0,$$

и мы получимъ

$$\int \frac{m v_z^2}{2} = mg \int dy,$$

$$\frac{m v_z^2}{2} - \frac{m v_z^2}{2} = mg \cdot (y_2 - y_1).$$

Полученныя формулы показываютъ, что при движеніи матеріальной точки подѣ влияніемъ силы тяжести живая сила точки возрастаетъ, когда точка движется внизъ, и убываетъ, когда она

движется вверхъ.

При этомъ абсолютная величина измѣненія живой силы точки равна произведенію вѣса точки на ту высоту, на которую точка опускается или поднимается въ разсматриваемой части пути.

Понятія: "работа силы" и "живая сила", установленныя здѣсь для матеріальной точки, распространяются затѣмъ на тѣ случаи, когда разиѣрами тѣла мы не пренебрегаемъ, и слѣдовательно, тѣло не можемъ разсматривать, какъ матеріальную точку, — напримеръ, когда твердое тѣло вращается около оси.

Эти случаи будутъ разсмотрѣны во второй части курса "Теоретической Механики".

---





## О Г Л А В Л Е Н І Е .

(Цифры въ скобкахъ указываютъ NN страницъ).

ВВЕДЕНІЕ (5).

## С Т А Т И К А .

Глава I. ПРИНЦИПЫ СТАТИКИ И СЛѢДСТВІЯ, НЕПОСРЕДСТВЕННО ИЗЪ НИХЪ ВЪТЕКАЮЩІЯ (7).

### СТАТИКА НА ПЛОСКОСТИ.

Глава II. СЛОЖЕНІЕ, РАЗЛОЖЕНІЕ И РАВНОВѢСІЕ СИЛЪ, ПРИЛОЖЕННЫХЪ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

§1. Способы "многочисленника силъ":

Силы, направленныя по одной прямой (18).

Дѣя силы, направленія которыхъ составляютъ уголъ (14)

Какое угодно число силъ, направленія которыхъ составляютъ углы между собой (15).

§2. Способы проецированія (19).

Глава III. СИЛЫ, ПРИЛОЖЕННЫЯ ВЪ РАЗНЫХЪ ТОЧКАХЪ ТѢЛА И ДѢЙСТВУЮЩІЯ ПО ЛИНІЯМЪ, ПЕРЕСѢКАЮЩИМСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

§1. (22).

§2. Моментъ силы относительно точки (23).

Теорема Вариньона (моментъ равнодѣйствующей) (24).

Аналитическое выраженіе момента силы относительно начала координатъ (26).

Условія равновесія рычага (27).

Глава IV. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЯ СИЛЫ ВЪ ПЛОСКОСТИ.

§1. Дѣя параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону (28); центръ ихъ (29); моментъ равнодѣйствующей (30).

§2. Какое-угодно число параллельныхъ силъ, направленныхъ

въ одну сторону: центръ ихъ; моментъ равнодѣйствующей (31).

§3. Дѣя неравныя параллельныя силы, направленныя въ равныя стороны: центръ ихъ; моментъ равнодѣйствующей (32).

§4. Пары силъ (34); моментъ пары (35); измѣненія пары, при которыхъ дѣйствіе ея на тѣло не измѣняется (36); моментъ пары, полученной отъ сложенія нѣсколькихъ паръ (37).

§5. Какое-угодно число параллельныхъ силъ, направленныхъ въ равныя стороны: случай, когда силы приводятся къ одной силѣ (38); центръ параллельныхъ силъ (39); случай, когда силы приводятся къ парѣ; случай, когда силы находятся въ равновѣсіи (40); асимметрическое равновѣсіе (41).

## Глава V. КАКІЯ УГОДНО СИЛЫ ВЪ ПЛОСКОСТИ.

§1. Сложеніе какихъ угодно силъ въ плоскости (42).

Случай, когда силы приводятся къ одной силѣ (43).

Случай, когда силы приводятся къ парѣ (44).

Случай, когда силы находятся въ равновѣсіи (46).

## Глава VI. ГРАФИЧЕСКАЯ СТАТИКА.

§1. Сложеніе двухъ силъ, направленія которыхъ составляють уголъ (47).

Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ (48).

§2. Разложеніе силы на двѣ параллельныя ей составляющія (50).

§3. Сложеніе сколькихъ-угодно силъ, какъ-угодно направленныхъ въ одной плоскости: случай, когда многоугольниковъ силъ не замкнуть (51); случай, когда многоугольниковъ силъ замкнуть (52).

§4. Сложеніе параллельныхъ силъ (54).

Примѣръ на случай параллельныхъ силъ: давленіе балки на двѣ опоры (55).

§5. Равновѣсіе стержневого многоугольника (56); примѣръ: стержневой многоугольникъ, поддерживающій мостъ (59).

## СТАТИКА ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Глава VII. СИЛЫ, ЛИНІЯ ДѢЙСТВІЯ КОТОРЫХЪ ПЕРЕСѢКАЮТСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

§1. Силы, приложенныя въ одной точкѣ (62).

Иностранники силъ (63).

Примѣненія способа проекцій (64).

§2. Силы, приложенныя въ разныхъ точкахъ тѣла, но направленныя по прямой, пересѣкающейся въ одной точкѣ (66).

Глава VIII. ПАРЫ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

§1. Измѣненія пары, при которыхъ дѣйствіе ея на тѣло не измѣняется (67).

Линейный моментъ пары (69).

§2. Линейный моментъ пары, полученной отъ сложенія нѣсколькихъ паръ (70).

Сложеніе, разложеніе и равновѣсіе паръ (71).

Глава IX. ЛИНЕЙНЫЙ МОМЕНТЪ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ.

§1. Величина и направленіе линейнаго момента силы относительно точки (72).

Линейный моментъ относительно точки равнодѣйствующей силѣ, приложенныхъ въ одной точкѣ тѣла (73).

§2. Моментъ силы относительно оси (74).

Связь момента силы относительно оси съ линейнымъ моментомъ силы относительно точки (77).

Моментъ относительно оси равнодѣйствующей силѣ, приложенныхъ въ одной точкѣ (78).

§3. Аналитическія выраженія моментовъ силы относительно координатныхъ осей (78); относительно осей имъ параллельныхъ (79) и относительно какой угодно оси (80). Аналитическія выраженія линейнаго момента силы относительно начала координатъ (79) и относительно какой угодно точки (80).

Глава X. СЛОЖЕНІЕ СИЛЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

§1. Общій случай (81).

Главный секторъ силъ (82).

Главный моментъ силъ (82).

Аналитическія выраженія проекцій на координатныя оси главнаго момента силъ относительно начала координатъ и какой угодно точки (88); проекція главнаго момента силъ на направленіе ихъ главнаго сектора (97).

Условія эквивалентности двухъ системъ силъ (88).

## §2. РАВНОВЕСІИ СИЛЪ.

Условія равновесія силъ въ общемъ случаѣ (88).

Условія равновесія параллельныхъ силъ (88).

Условія аstaticескаго равновесія параллельныхъ силъ (90).

## §3. ПРИВЕДЕНІЕ СИСТЕМЫ СИЛЪ КЪ ЦЕНТРУ (90).

## §4. ПРИВЕДЕНІЕ СИСТЕМЫ СИЛЪ КЪ ОДНОЙ СИЛѢ.

Условіе (необ. и дост.) такого приведенія (90).

Величина, направленіе и точка приложенія равнодѣйствующей: построеніе точки приложенія и аналитическія выраженія ея координатъ (92).

Случай параллельныхъ силъ (94): центръ параллельныхъ силъ (95); аналитическія выраженія его координатъ (95).

## §5. ПРИВЕДЕНІЕ СИСТЕМЫ СИЛЪ КЪ КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ (97).

Построеніе центральной оси системы силъ (98).

Моментъ пары при каноническомъ видѣ системы (99).

# Глава XI. ЦЕНТРЪ ТЯЖЕСТИ.

## §1. Общій способъ для нахожденія центра тяжести (99).

Случай, когда тѣло имѣетъ плоскость симметріи, ось симметріи и центръ симметріи (101).

Выраженія координатъ центра тяжести тѣла, линіи, площади и поверхностей въ случаѣ однородной плотности (102).

## §2. Опредѣленіе центра тяжести линіи (104): примѣры: центры тяжести части правильнаго многоугольника (105) и дуги круга (106).

Опредѣленіе центра тяжести площади и поверхности (106); примѣры: центры тяжести площади круговаго сектора и поверхности шароваго сегмента (107).

Опредѣленіе центра тяжести объема (107); центры тя-

же кривої тетраедра (107), піраміди (108) і конуса (109).

## Глава XII. РАВНОВАГІ ВЕСВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТІЛА.

Умовія рівноваги; определініе реакцій опоръ и давленій на опори (109).

§1. Случай, когдѣ тѣло имѣетъ двѣ неподвижныя точки (111).

Случай, когдѣ тѣло опирается нѣсколькими точками на гладкую плоскость (111).

## К И Н Е М А Т И К А .

(Основныя понятія).

### КИНЕМАТИКА ТОЧКИ.

§1. ГРАФИЧЕСКОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЪРАЖЕНІЯ ДВИЖЕНІЯ ТОЧКИ (117).

Уравненіе движенія точки по ея траекторіи (118); кривая разстояній (119).

Уравненія движенія точки, составляемыя съ помощью координатъ (121).

§2. СКОРОСТЬ ТОЧКИ.

Средняя скорость (124).

Величина скорости въ моментъ  $t$  (125); кривая скоростей (126).

Направленіе скорости въ моментъ  $t$  (126).

Въраженія проекцій скорости на координатныя оси (126).

Определеніе движенія точки по данной ея скорости (127).

§3. УСКОРЕНІЕ ТОЧКИ.

Величина и направленіе ускоренія (128).

Въраженія проекцій ускоренія на координатныя оси (129).

Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи и въ равнопрямомъ движеніи точки по окружности (129).

Определеніе движенія точки по данному ея ускоренію (129).



## КИНЕМАТИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА.

### §4. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНІЕ.

Трансклоріи скорости и ускоренія точекъ тѣла (139).

### §5. ВРАЩЕНІЕ ТѢЛА ВОКРУГЪ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

Трансклоріи точекъ тѣла (142).

Угловая скорость (142).

Скорости точекъ тѣла (143).

Угловое ускореніе (144).

Выраженія проекцій на координатныя оси ускоренія какой либо точки тѣла (145).

Вращательное и центробежное ускоренія какой либо точки тѣла (146).

### §6. ДВИЖЕНІЕ ТѢЛА, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ПЛОСКОСТИ.

Теорема о перемѣщеніи плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости (теорема Галля) (147).

Мгновенный центръ; центры и аксоиды (149).

### §7. ВРАЩЕНІЕ ТѢЛА ВОКРУГЪ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

Теорема о перемѣщеніи (151).

Мгновенная ось и аксоиды (153).

## КИНЕТИКА ИЛИ ДИНАМИКА.

(Основныя понятія).

ПОНЯТІЕ О МАТЕРІАЛЬНОЙ ТОЧКѢ (157).

### Глава I. ПРИНЦИПЫ КИНЕТИКИ И ГЛАВНАЯ ЗАДАЧА КИНЕТИКИ ТОЧКИ.

#### §1. Принципы кинетики.

Принципъ инерціи (158); понятіе о силѣ (159).

Второй принципъ (159); понятіе о массѣ (159); измѣреніе силы (160); аналитическія выраженія связи между ускореніемъ точки и дѣствующею силою (161).

Третій принципъ, относящійся къ одновременному дѣствію силъ на точку (162).

**§2. Главныя задачи кинетики точки.**

Определение силы, производящей данное движение точки (166).

**Глава II. ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.**

**§1. Работа силы и живая сила матеріальной точки.**

Работа постоянной силы при прямолинейномъ движеніи точки (168).

Элементарная работа силы и работа на конечной части пути точки (169).

Работа равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ (171).

Выраженіе работы силы черезъ ея проекціи и координаты точки (172).

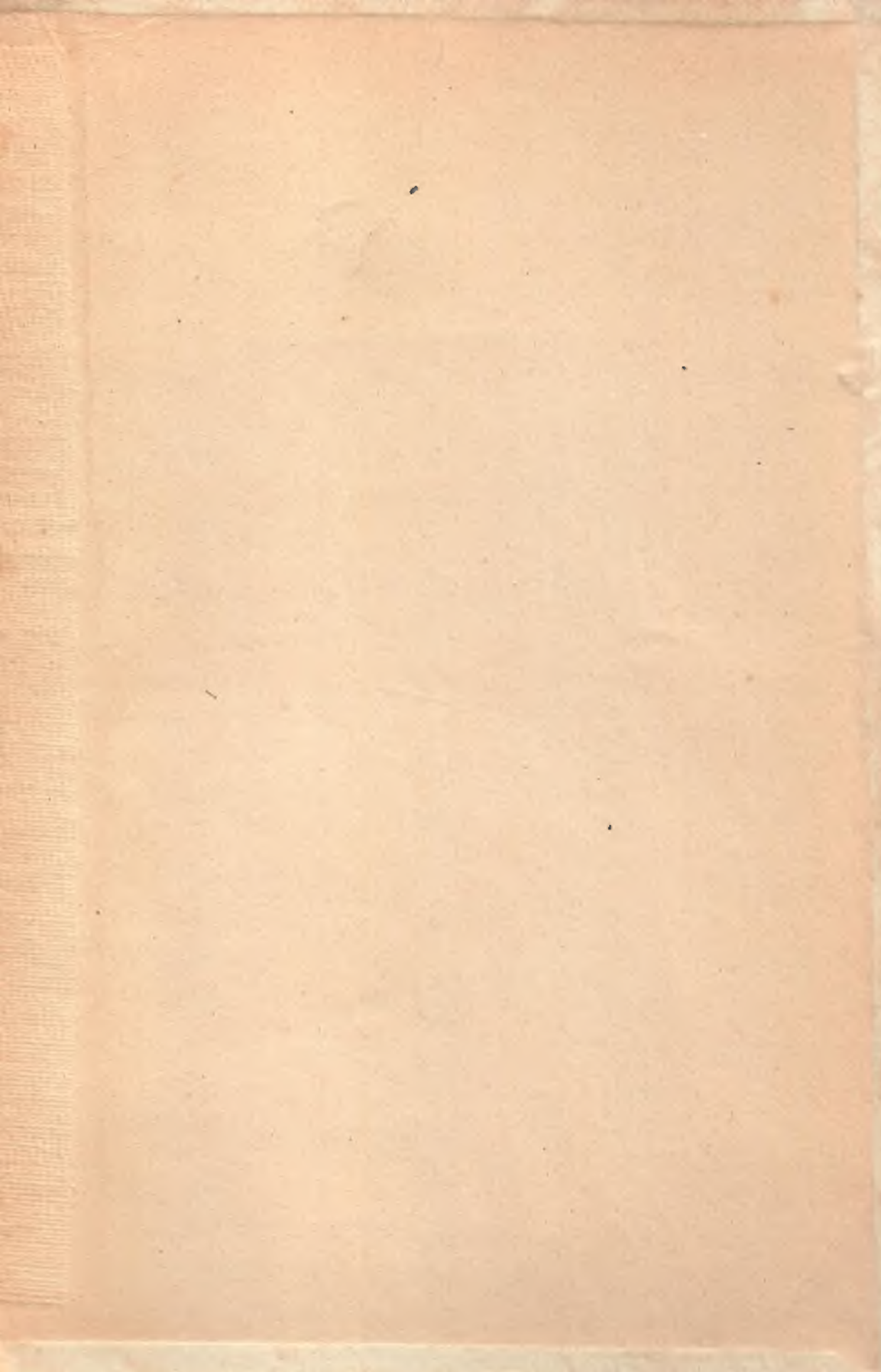
Живая сила матеріальной точки (172).

**§2. Законъ живой силы.**

Связь между живою силою точки и работою силъ, къ ней приложенныхъ (173).

-----







Цѣна 1р. 10 к. въ переп.